

ZAAWANSOWANE PROGRAMOWANIE KOMPUTEROWE WNE (2025)

KRZYSZTOF ZIEMIAŃSKI

3. REKURENCJA

Rekurencja to technika programowania polegająca na zastąpieniu pętli (iteracji) przez wywołania funkcji przez siebie samą. Oto klasyczny przykład.

3.1. **Silnia.** Funkcja silnia może być zdefiniowana na dwa sposoby:

- *Definicja iteracyjna:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.
- *Definicja rekurencyjna:* $n! = n \cdot (n-1)!$ jeśli $n > 0$ oraz $0! = 1$.

Poniżej funkcje korzystające z poszczególnych definicji.

Iteracyjna:

```
int silnia(int n) {
    int w=1;
    for(int i=1; i<=n; i++)
        w*=i;
    return w;
}
```

Rekurencyjna:

```
int silnia(int n) {
    if(n==0)
        return 1;
    return n*silnia(n-1);
}
```

Funkcja silnia nie jest wyjątkiem — każda funkcja, którą można zapisać za pomocą iteracji (tzn. pętli) można też zapisać za pomocą rekurencji i na odwrót: każdą funkcję rekurencyjną można zastąpić równoważną funkcją iteracyjną. Czasem łatwiej i lepiej użyć iteracji, a czasem odwrotnie.

3.2. **Drukowanie ciągu liczb.** Poniżej kolejny przykład: funkcja, która drukuje na ekranie liczby od 1 do n. Bardziej naturalna jest wersja iteracyjna:

```
void drukujLiczby1(int n) {
    for(int i=1; i<=n; i++)
        cout << i << " ";
}
```

Można też za pomocą rekurencji:

```
void drukujLiczby2(int n, int k=1) {
    if(k<=n) {
        cout << k << " ";
        g(n, k+1);
    }
}
```

```
    }
}
```

Proszę zwrócić uwagę, że wymaga to użycia dodatkowego parametru `k`, który mówi od której liczby należy rozpocząć drukowanie. Tak naprawdę, funkcja `drukujLiczby2` jest bardziej uniwersalna: drukuje liczby od dowolnego `k`. W przypadku zamiany iteracji na rekurencję czasem istnieje konieczność użycia takich "dodatkowych" parametrów. W tym przypadku można jednak tego uniknąć zamieniając kolejność drukowania liczby i wywołania rekurencyjnego funkcji:

```
void drukujLiczby3(int n) {
    if(n>0) {
        g(n-1);
        cout << n << " ";
    }
}
```

3.3. Ciąg Fibonacciego. Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

zdefiniowany następująco

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Istnieje też jawny wzór na F_n

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

który jednak nie wygląda zbyt prosto. Korzystając ze wzoru rekurencyjnego możemy łatwo napisać funkcję, która oblicza F_n :

```
int fibo(int n) {
    if(n==0) return 0;
    if(n==1) return 1;
    return fibo(n-2)+fibo(n-1);
}
```

Funkcja działa poprawnie, ale bardzo wolno (proszę spróbować obliczyć `fibo(45)`). Powodem jest to, że wartości `fibo(n)` dla poszczególnych liczb `n` są obliczane wielokrotnie. Można temu zaradzić na dwa sposoby:

1. Zapamiętywać wartości, które już zostały policzone:

```
vector<int> tablicaFibo; // wymaga biblioteki <vector>

int fibo(int n) {
    // przy pierwszym wywołaniu fibo ustawiamy dwa pierwsze elementy
    if(tablicaFibo.size()<2) {
        tablicaFibo.push_back(0); // fibo(0)==0
        tablicaFibo.push_back(1); // fibo(1)==1
    }
}
```

```

// jeśli element nie został jeszcze policzony
// to liczymy i wpisujemy do tablicy
if(tablicaFibo.size()<=n) {
    int v=fibo(n-2)+fibo(n-1);
    tablicaFibo.push_back(v);
    // elementy na pewno licza się po kolei,
    // więc wiemy, że wpisze się na właściwym miejscu
}
return tablicaFibo[n];
}

```

2. Użyć iteracji:

```

int fibo(int n) {
    if(n==0) return 0;
    if(n==1) return 1;
    int a=0;
    int b=1;
    for(int i=2; i<=n; i++) {
        // Zastępujemy parę (a,b) przez (b,a+b)
        int c=a+b;
        a=b;
        b=c;
    }
    return b;
}

```

3.4. Zadania.

- (1) Napisać rekurencyjną funkcję

```
void ciag(int p, int r, int n);
```

która drukuje ciąg arytmetyczny o n wyrazach, pierwszym wyrazie p oraz różnicy r .

- (2) Napisać rekurencyjną funkcję

```
int wystapienia(char* s, char c);
```

która oblicza liczbę wystąpień znaku c w napisie s .

- (3) Napisać rekurencyjną funkcję

```
bool prefiks(char* s, char* t);
```

która zwraca `true` jeśli napis t jest prefiksem napisu s .

- (4) Napisać rekurencyjną funkcję

```
int znajdz(char* s, char* t);
```

która zwraca indeks pierwszego wystąpienia napisu t w napisie s . Jeśli brak wystąpień, należy zwrócić `-1`.

- (5) Napisać rekurencyjną funkcję

```
void drukuj(int n, int r)
```

która drukuje liczbę n w systemie pozycyjnym o podstawie r . Zadbać o to, aby cyfry drukowały się w kolejności od najbardziej znaczącej do najmniej znaczącej.

- (6) Napisać rekurencyjną funkcję

```
bool zawiera(char* s, char* t)
```

która zwraca `true` jeśli napis `t` można uzyskać z napisu `s` przez usunięcie pewnej liczby znaków (niekoniecznie kolejnych).

- (7) Napisać funkcję

```
int malejaceCiagi(int s)
```

która zwraca liczbę ściśle malejących ciągów liczb naturalnych, których suma wynosi `s`. Np. `f(6)=4`, bo

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1.$$

- (8) Poniższa funkcja

```
void tabliczka(int n) {
    for(int i=1; i<=n; i++) {
        for(int j=1; j<=n; j++) {
            if(i*j<10) cout << " ";
            cout << " " << i*j;
        }
        cout << endl;
    }
}
```

drukuję tabliczkę mnożenia o wymiarach $n \times n$. Napisać równoważną funkcję rekurencyjną (nie używającą pętli).

- (9) Dwumian Newtona jest zdefiniowany wzorem ($n \geq k \geq 0$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub równoważnym wzorem rekurencyjnym

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < k \text{ lub } k < 0 \\ 1 & \text{dla } 0 = k \leq n \text{ lub } 0 \leq k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Należy napisać dwie funkcje

```
int dwumian(int n, int k)
```

jedna korzystająca z definicji iteracyjnej, a druga z rekurencyjnej oraz przetestować je i znaleźć ich wady (podpowiedź: dla dużych n i k jedna z nich będzie działać wolno, a druga będzie zwracać nieprawidłowe wyniki). Następnie napisać funkcję `dwumian`, która będzie tych wad pozbawiona, tzn. będzie działać szybko oraz poprawnie (o ile wynik będzie się mieścił w zakresie typu `int`, tj. około $2 \cdot 10^9$).

- (10) Napisać funkcję

```
int f(int a, int b)
```

która zwraca liczbę napisów o następujących własnościach:

- napis składa się z dokładnie a liter 'A', dokładnie b liter 'B' i żadnych innych znaków,
- w każdym prefiksie napisu występuje więcej lub tyle samo liter 'A' co liter 'B'.

(11) Napisać funkcję

```
int f(int n);
```

która zwraca liczbę przedstawień liczby n w postaci sumy różnych liczb pierwszych.