TOPOLOGIA - ZADANIA DO OPRACOWANIA

KRZYSZTOF ZIEMIAŃSKI

(1) Rozstrzygnąć, czy przestrzeń liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

(2) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $U \subseteq X$ nazywamy odcinkowo otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przekształcenia ciągłego $f : [0, 1] \to X$ zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty w $[0, 1]$.
- Zbadać, czy rodzina zbiorów odcinkowo otwartych jest topologią
- Wykazać, że podzbiór $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest odcinkowo otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty
- Podać przykład przestrzeni łukowo spójnej X i podzbioru $U \subseteq X$, który jest odcinkowo otwarty, ale nie jest otwarty.

(3) Przestrzeń Y nazywamy uzwarceniem przestrzeni topologicznej X, jeśli $X \subseteq Y$ jest podprzestrzenią topologiczną i $cl\ X = Y$. Podać przykład uzwarcenia Y przestrzeni $\mathbb{R}$ takiego, że
- $Y \setminus \mathbb{R}$ ma dokładnie jeden punkt
- $Y \setminus \mathbb{R}$ ma dokładnie dwa punkty
- $Y \setminus \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele punktów

(4) Skonstruować metrykę d na przestrzeni liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (zgodną z topologią) tak, aby uzupełnienie $(\mathbb{Q}, d)$ było homeomorficzne z przeliczalną rodziną okręgów.

(5) Dane są przestrzenie metryczne zupełne (X, d_X) i (Y, d_Y). Zbadać, czy przestrzeń funkcji $f : X \to Y$ spełniających warunek Lipschitza ze stałą 1, z metryką supremum jest zupełna.

(6) Udowodnić, że otwarty podzbiór przestrzeni zupełnej jest metryzowalny w sposób zupełny.

(7) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią zwartą. Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $Map(X, Y)$ musi być zwarta.

(8) Niech $F \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem domkniętym brzegowym. Udowodnić, że istnieją zbiory gęste $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $F \cap A \times B = \emptyset$.

(9) Niech X będzie zbiorem domkniętych podzbiorów odcinka $[0, 1]$. Określmy metrykę na X przez

$$d(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\}$$

Udowodnić, że X jest zwarta.

(10) Zbadać, czy przeliczalny produkt przestrzeni ośrodkowych jest przestrzenią ośrodkową.

(11) Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $Map([0,1], X)$ jest łukowo spójna.
(12) Załóżmy, że przestrzenie X i Y są spójne i ośrodkowe. Czy przestrzeń $Map(X, Y)$ musi być ośrodkowa?
(13) Niech X będzie przestrzenią zwartą. Rozstrzygnąć, czy zbiór homeomorfizmów $X \to X$ jest domknięty w $Map(X, X)$.