TOPOLOGIA - ZADANIA DO OPRACOWANIA

KRZYSZTOF ZIEMIAŃSKI

(1) Oznaczmy $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}$, $B_n := A^n \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zbadać, które z przestrzeni B_n są ze sobą homeomorficzne.
(2) Znaleźć podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, która jest homeomorficzna z trójwymiarowym torusem $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.
(3) Znaleźć podprzestrzeń przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $C([0,1])$ z metryką supremum, która jest homeomorficzna z okręgiem.
(4) Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową jest homeomorficzna z przestrzenią

$$\mathbb{R}_d \times [0, \infty)/(x, 0) \sim (x', 0),$$

gdzie $\mathbb{R}_d$ jest zbiorem liczb rzeczywistych z topologią dyskretną.
(5) Dana jest spójna przestrzeń metryczna X oraz punkt $x_0 \in X$. Udowodnić, że przestrzeń $\{0,1\} \times X/(0, x_0) \sim (1, x_0)$ jest metryzowalna. Dla jakich X metryzowalna jest przestrzeń $\mathbb{Z} \times X/(m, x_0) \sim (n, x_0)$?
(6) Znaleźć wszystkie klasy homeomorfizmu grafów o co najwyżej 4 krawędziach.
(7) Znaleźć wszystkie klasy homeomorfizmu przestrzeni postaci

$$S_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}/z \simeq ze^{2\pi i \varphi}.$$

(8) Niech F będzie zbiorem ograniczonych funkcji mierzalnych na odcinku $[0,1]$. Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią na F zadaną przez metrykę supremum ($\mu(f,g) = \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$), a $\mathcal{T}'$ przez metrykę całkową $\mu(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$. Czy przestrzenie $(F, \mathcal{T})$ i $(F, \mathcal{T}')$ są ośrodkowe? Znaleźć podzbiór $A \subseteq F$, który jest homeomorficzny z odcinkiem w topologii $\mathcal{T}'$, zaś dyskretny w topologii $\mathcal{T}$.
(9) Udowodnić, że podzbiór $U \subseteq \mathbb{R}^2$ jest otwarty (w topologii euklidesowej) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przekształcenia ciągłego $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty w $\mathbb{R}$.
(10) Zbadać, czy przeliczalny produkt przestrzeni ośrodkowych jest przestrzenią ośrodkową.
(11) Wykazać, że dla $n > 1$ dopełnienie zbioru przeliczalnego w $\mathbb{R}^n$ jest łukowo spójne.
(12) Wykazać, że spójny otwarty podzbiór płaszczyzny jest łukowo spójny.
(13) Udowodnić, że wstęga Mobiusa z usuniętym równikiem jest homeomorficzna z walcem (Zad. 2.14).