GAL*

Krzysztof Ziemiański

16 marca 2020

W1 (25 II)

1 Kategorie

1.1 Kategorie

Definicja 1.1 (Kategoria)**.**
Kategoria $\mathscr{C}$ składa się z:
- rodziny obiektów $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (niekoniecznie jest to zbiór),
- dla każdej pary obiektów $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ dany jest zbiór $\mathscr{C}(a, b)$ zwany *zbiorem morfizmów z* a *do* b,
- dla każdej trójki $a, b, c \in \ Ob(\mathscr{C})$ dane jest działanie

$$\mathscr{C}(a, b) \times \mathscr{C}(b, c) \ni (f, g) \mapsto g \circ f \in \mathscr{C}(a, c)$$

  zwane składaniem morfizmów.

Spełnione są następujące aksjomaty:
- dla każdego obiektu a istnieje morfizm $\mathrm{id}_a \in \mathscr{C}(a, a)$ taki, że $f \circ \mathrm{id}_a = f$, $\mathrm{id}_a \circ g = g$ dla wszystkich f, g dla których składanie ma sens.
- składanie jest łączne.

Kategorię nazywamy *małą* jeśli rodzina jej obiektów jest zbiorem.

Przykład 1.2 (Przykłady kategorii)**.**
- **Set**: kategoria zbiorów.
- $\mathbf{Vect}_K$: kategoria przestrzeni wektorowych nad K.
- $\mathbf{Set}_*$: kategoria zbiorów z wyróżnionym punktem.
- Kategorie z jednym obiektem.
- $\mathcal{C}^{op}$: kategoria odwrotna do $\mathscr{C}$.
- Produkt kategorii.

Definicja 1.3 (Podkategoria)**.**
Kategoria $\mathscr{D}$ jest *podkategorią* kategorii $\mathscr{C}$ jeśli:
- $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$,
- $\mathrm{id}_a \in \mathscr{D}(a, a)$ dla każdego $a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$,
- $\mathscr{D}(a, b) \subseteq \mathscr{C}(a, b)$ dla każdych $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$,
- składanie w $\mathscr{D}$ jest obcięciem składania w $\mathscr{C}$.

Jeśli $\mathscr{D}(a, b) = \mathscr{C}(a, b)$ dla wszystkich $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, to podkategorię nazywamy *pełną*.

Definicja 1.4 (Rodzaje morfizmów)**.**
Morfizm $f \in \mathscr{C}(a, b)$ jest
- *izomorfimem* jeśli istnieje $g \in \mathscr{C}(b, a)$ takie, że $fg = \mathrm{id}_b$, $gf = \mathrm{id}_a$.
- *przekrojem* jeśli istnieje $g \in \mathscr{C}(b, a)$ takie, że $gf = \mathrm{id}_a$.
- *retrakcją* jeśli istnieje $g \in \mathscr{C}(b, a)$ takie, że $fg = \mathrm{id}_b$.
- *monomorfizmem* jeśli dla dowolnych $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(c, a)$, $fg_1 = fg_2$ implikuje $g_1 = g_2$.
- *epimorfizmem* jeśli dla dowolnych $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(b, c)$, $g_1 f = g_2 f$ implikuje $g_1 = g_2$.

1.2 Funktory

Definicja 1.5 (Funktor).
Funktor F z $\mathscr{C}$ do $\mathscr{D}$ jest zadany przez następujące dane:

- Dla każdego obiektu $a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ określony jest pewien obiekt $F(a) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.
- Dla każdego morfizmu $f \in \mathscr{C}(a,b)$ określony jest morfizm $F(f) \in \mathcal{D}(F(a), F(b))$.

Spełnione są następujące warunki:

- $\forall_{a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}\ F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$,
- dla każdej pary składalnych morfizmów f, g w $\mathscr{C}$ mamy $F(gf) = F(g)F(f)$.

Przykład 1.6 (Przykłady funktorów).

(a) Funktor zapominania $\mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}$.
(b) Przestrzeń współrzędnych $\mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_K$.
(c) Przestrzeń sprzężona $\mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K^{op}$.
(d) Suma prosta $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$.
(e) $\mathrm{Hom} : \mathbf{Vect}_K^{op} \times \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$.

Definicja 1.7 (Izomorfizm kategorii).
Izomorfizmem kategorii nazywamy funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ posiadający odwrotność, tj. funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ taki, że $FG = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, $GF = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$. Wtedy $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ nazywają się izomorficzne.

Definicja 1.8 (Własności funktorów).
Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ jest:

- *pełny* jeśli $\mathscr{C}(a,b) \to \mathscr{D}(F(a), F(b))$ jest surjekcją ($\forall\, a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),\ \forall\, b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$),
- *wierny* jeśli $\mathscr{C}(a,b) \to \mathscr{D}(F(a), F(b))$ jest injekcją ($\forall\, a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),\ \forall\, b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$),
- *istotnie surjektywny* jeśli dla każdego $b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ istnieje $a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ taki, że b i $F(a)$ są izomorficzne.

Definicja 1.9 (Równoważność kategorii).
Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ nazywamy *równoważnością kategorii* jeśli jest pełny, wierny i istotnie surjektywny. Kategorie są *równoważne* jeśli istnieje równoważność pomiędzy nimi.

Przykład 1.10 (Równoważność kategorii).

- Kategorie $(\bullet)$ i $(\bullet \leftrightarrows \bullet)$ są równoważne, ale nie są izomorficzne.
- Kategorie $(\bullet)$ i $(\bullet \to \bullet)$ nie są równoważne.
- Kategoria $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ i jej pełna podkategoria zawierająca przestrzenie K^n są równoważne, ale nie izomorficzne.
- Niech $\mathscr{M}_K$ będzie kategorią taką, że
  - Obiekty to liczby naturalne 0,1,2,....
  - $\mathscr{M}_K(m,n)$ to macierze $M_{n\times m}(K)$.
  - Składanie jest zadane przez mnożenie macierzy: $A \circ B = BA$.

  Wówczas $\mathscr{M}_K$ jest izomorficzna z kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni współrzędnych.

W2 (27 II)

1.3 Transformacje naturalne

Definicja 1.11 (Transformacja naturalna).
Niech $F, G : \mathscr{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami. *Transformacją naturalną* z $\mathscr{C}$ do $\mathscr{D}$, $T : \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$ nazywamy rodzinę morfizmów $\{T(c) \in \mathscr{D}(F(c), G(c))\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ taką, że dla każdego morfizmu $f \in \mathscr{C}(a,b)$ zachodzi równość $G(f)T(a) = T(b)F(f)$.

Transformację naturalną $T : \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$ nazywamy *naturalną równoważnością* jeśli $T(c)$ jest izomorfizmem dla każdego $c \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Przykład 1.12 (Podwójne sprzężenie).
Niech $V \in \mathbf{Vect}_K$ i niech $\alpha \in V$. Niech $\Phi(V)(\alpha) \in V^{**}$ będzie dany wzorem

$$\Phi(V)(\alpha)(\varphi) = \varphi(\alpha)$$

dla $\varphi \in V^*$. Wówczas $\Phi(V)$ jest homomorfizmem $V \to V^{**}$, a Φ jest transformacją naturalną $Id_{\mathbf{Vect}_K} \Rightarrow (-)^{**}$. Jeśli ograniczymy się do przestrzeni skończenie wymiarowych, tj. rozważać będziemy pełną podkategorię $\mathbf{Vect}_K^{fin}$, to Φ jest naturalną równoważnością.

Definicja 1.13 (Funktory dołączone)**.**
Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ nazywamy *lewym funktorem dołączonym* do funktora $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ (a G, *prawym dołączonym* do F) jeśli funktory

$$\mathscr{C} \times \mathscr{D} \ni (a, b) \mapsto \mathscr{D}(F(a), b) \in \mathbf{Set}$$
$$\mathscr{C} \times \mathscr{D} \ni (a, b) \mapsto \mathscr{C}(a, G(b)) \in \mathbf{Set}$$

są naturalnie równoważne. Równoważnie: dla każdej pary obiektów $a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ istnieje *naturalna* bijekcja

$$\mathscr{D}(F(a), b) \simeq \mathscr{C}(a, G(b)).$$

Przykład 1.14 (Funktory dołączone)**.**
Przestrzeń współrzędnych jest lewa dołączona do funktora zapominania.

1.4 Kategorie diagramów

Definicja 1.15 (Diagram)**.**
Diagramem w kategorii $\mathcal{C}$ o kształcie małej kategorii $\mathcal{D}$ nazywamy funktor $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Przykład 1.16 (Przykłady diagramów)**.**
(a) Diagram o kształcie $(\bullet)$ to obiekt.
(b) Diagram o kształcie $(\bullet \quad \bullet)$ to para przestrzeni.
(c) Diagram o kształcie $(\bullet \to \bullet)$ to morfizm.
(d) Diagram o kształcie $(\bullet \leftrightarrows \bullet)$ to izomorfizm.
(e) Diagram o kształcie $(\bullet^{\circlearrowleft \mathbb{N}})$ to endomorfizm.
(f) Diagram o kształcie $(\bullet^{\circlearrowleft \mathbb{Z}})$ to automorfizm.

Definicja 1.17 (Kategoria funktorów)**.**
Kategoria diagramów (funktorów) z małej kategorii $\mathscr{D}$ do kategorii $\mathscr{C}$, ozn. $\mathrm{Fun}(\mathscr{D}, \mathscr{C})$, to kategorią, której obiektami są funktory z $\mathscr{D}$ do $\mathscr{C}$, a morfizmami transformacje naturalne, tj.

$$\mathrm{Fun}(\mathscr{D}, \mathscr{C})(F, G) = \{T : F \Rightarrow G\}.$$

Przykład 1.18 (Kategorie diagramów)**.**
- $\mathrm{Fun}((\bullet), \mathscr{C}) \cong \mathscr{C}$.
- $\mathrm{Fun}((\bullet \quad \bullet), \mathscr{C}) \cong \mathscr{C} \times \mathscr{C}$.
- $\mathrm{Fun}((\bullet \to \bullet), \mathscr{C})$ to kategoria morfizmów.
- $\mathrm{Fun}((\bullet^{\circlearrowleft \mathbb{N}}), \mathscr{C})$ to kategoria endomorfizmów.

1.5 Granice

Definicja 1.19 (Stożki i kostożki)**.**
Niech $\mathscr{D}$ będzie małą kategorią, $\mathscr{C}$ dowolną kategorią, a $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funktorem (diagramem).
- *Stożkiem* nad F nazywamy obiekt $x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ wraz z rodziną morfizmów $\{f_a \in \mathscr{C}(x, F(a)]\}_{a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})}$ takich, że dla każdego morfizmu $g \in \mathscr{D}(a, b)$ zachodzi $f_b = F(g) f_a$.
- *Kostożkiem* nad F nazywamy obiekt $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ wraz z rodziną morfizmów $\{f_a \in \mathscr{C}(F(a), x)\}_{a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})}$ takich, że dla każdego morfizmu $g \in \mathcal{D}(a, b)$ zachodzi $f_a = f_b F(g)$.

Definicja 1.20 (Granice i kogranice)**.**
- *Granicą (granicą odwrotną)* F nazywamy stożek $(x, \{f_a\}_{a \in \mathscr{D}})$ nad F taki, że dla każdego stożka $(y, \{h_a\})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $u \in \mathscr{C}(y, x)$ taki, że $u f_a = h_a$ dla wszystkich $a \in \mathscr{D}$.
- *Kogranicą (granicą prostą)* F nazywamy kostożek $(x, \{f_a\}_{a \in \mathscr{D}})$ nad F taki, że dla każdego kostożka $(y, \{h_a\})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $u \in \mathscr{C}(x, y)$ taki, że $f_a u = h_a$ dla wszystkich $a \in \mathscr{D}$.

Jeśli $(x, \{f_a\}_{a \in \mathscr{D}})$ jest granicą (kogranicą) F, piszemy też $x = \lim(F)$ ($x = \mathrm{colim}(F)$).

Przykład 1.21 (Przykłady granic diagramów o kształcie $\mathscr{D}$)**.**
Niech $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ będzie diagramem.

- Jeśli $\mathscr{D} = \emptyset$, to $\lim(\emptyset)$ jest obiektem końcowym, a $\operatorname{colim}(\emptyset)$ obiektem początkowym kategorii $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{D} = (\bullet)$. Wtedy $\operatorname{colim}(F) = \lim(F) = F(\bullet)$.
- Jeśli $\mathscr{D}$ posiada obiekt początkowy $a \in \mathscr{D}$, to $\lim(F) = F(a)$.
- Jeśli $\mathscr{D}$ posiada obiekt końcowy $z \in \mathscr{D}$, to $\operatorname{colim}(F) = F(z)$.
- Jeśli $\mathscr{D} = (\bullet_1 \quad \bullet_2)$, to
  - $\lim(F)$ nazywamy produktem $A = F(\bullet_1)$ i $B = F(\bullet_2)$ i oznaczamy $A \times B$,
  - $\operatorname{colim}(F)$ nazywamy koproduktem $A = F(\bullet_1)$ i $B = F(\bullet_2)$ i oznaczamy $A \coprod B$.
- W kategorii $\mathbf{Vect}_K$ mamy $V \times W = V \oplus W$, $V \coprod W = V \oplus W$ (trochę inaczej dla nieskończonych produktów i koproduktów).

Definicja 1.22 (Jądro, obraz i przestrzeń ilorazowa)**.**
Wszystkie poniższe diagramy są w $\mathbf{Vect}_K$. Wybierzmy homomorfizm $f : V \to W$.

- *Jądrem* homomorfizmu f nazywamy

$$\ker(f) = \lim \left(\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ & 0 \arrow[u] \end{tikzcd} \right)$$

- *Kojądrem* f nazywamy

$$\operatorname{coker}(f) = \operatorname{colim} \left(\begin{tikzcd} 0 & \\ V \arrow[u] \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd} \right)$$

  Jeśli f jest włożeniem, to $\operatorname{coker}(V \subseteq W) = W/V$ nazywamy *przestrzenią ilorazową*.

W3 (3 III)

2 Endomorfizmy

2.1 Endomorfizmy i ich macierze

Niech K będzie ustalonym ciałem. O ile nie zaznaczymy inaczej, będziemy rozważać tylko skończenie wymiarowe przestrzenie nad ciałem K.

Definicja 2.1 (Endomorfizm)**.**
- *Endomorfizmem* przestrzeni wektorowej $V \in \mathbf{Vect}_K$ nazywamy homomorfizm $f : V \to V$.
- Zbiór endomorfizmów V oznaczamy przez $\operatorname{End}(V)$. Jest to przestrzeń wektorowa, a nawet algebra (z działaniem składania).
- Endomorfizmy $f : V \to V$ oraz $g : W \to W$ są *sprzężone* jeśli istnieje izomorfizm $h : V \to W$ taki, że $gh = hf$.
- Można rozważać kategorię endomorfizmów $\operatorname{Fun}((\bullet^{\circlearrowleft\mathbb{N}}), \mathbf{Vect}_K)$. Wówczas endomorfizmy są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy są izomorficzne jako obiekty tej kategorii.
- Naszym celem będzie klasyfikacja klas sprzężoności endomorfizmów.

Definicja 2.2 (Macierz endomorfizmu)**.**
Macierzą endomorfizmu $f : V \to V$ w bazie $\mathcal{A}$ nazywamy macierz $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \in M_{n\times n}(K)$, gdzie $n = \dim(V)$.

Uwaga 2.3. Dany endomorfizm może mieć różne macierze w różnych bazach. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — bazy V, $f \in \operatorname{End}(V)$ to

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{M}(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (\mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} \cdot \mathcal{M}(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Definicja 2.4 (Macierze podobne)**.**
Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są *podobne* jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Stwierdzenie 2.5 (Endomorfizmy sprzężone a macierze podobne)**.**

- *Macierze są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tego samego endomorfizmu.*
- *Endomorfizmy są sprzężone, jeśli w pewnych bazach mają tą samą macierz.*

Definicja 2.6 (Niezmiennik endomorfizmu)**.**
Funkcję $M_{n\times n}(K) \to X$ nazywamy *niezmiennikiem endomorfizmu* jeśli jej wartości są takie same na macierzach podobnych. Każdy niezmiennik endomorfizmu zadaje funkcję na $\mathrm{End}(V)$, która nie zależy od klasy sprzężoności endomorfizmu.

Przykład 2.7 (Przykłady niezmienników endomorfizmu)**.**

- Rząd.
- Wyznacznik.

Definicja 2.8 (Ślad macierzy)**.**
Śladem macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy liczbę $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} \in K$.

Stwierdzenie 2.9.
Dla $A, B \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Wniosek 2.10. *Ślad jest niezmiennikiem endomorfizmu.*

2.2 Wektory własne i wartości własne

Niech $V \in \mathbf{Vect}_K$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n i niech $f \in \mathrm{End}(V)$.

Definicja 2.11 (Wektor własny)**.**
Niezerowy wektor $\alpha \in V$ nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu f, jeśli $f(\alpha) = \lambda \cdot \alpha$ dla pewnego skalara $\lambda \in K$. Skalar λ nazywamy *wartością własną* wektora własnego α.

Definicja 2.12 (Wartość własna automorfizmu)**.**
Skalar $\lambda \in K$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu jeśli istnieje wektor własny z wartością własną λ.

Definicja 2.13 (Podprzestrzeń własna)**.**
Przestrzeń

$$V_{(\lambda)} := \{\alpha \in V : \ f(\alpha) = \lambda \cdot \alpha\}$$

nazywamy *podprzestrzenią własna* endomorfizmu f odpowiadająca wartości własnej λ.

Stwierdzenie 2.14.
Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ są wektorami własnymi o parami różnych wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, to układ (α_i) jest liniowo niezależny.

Dowód. Indukcja po k. Jesli $k = 1$ to jasne. Załóżmy, że $c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0$. Mamy

$$f(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = \lambda_1 c_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k c_k\alpha_k$$

i zarazem

$$f(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = \lambda_k c_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k c_k\alpha_k$$

bo $c_1\alpha_1 + \cdots + c_{k-1}\alpha_{k-1} = -c_k\alpha_k$ jest wektorem własnym z wartością własną λ_k (lub zerem). Po odjęciu dostajemy

$$(\lambda_1 - \lambda_k)c_1\alpha_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1}\alpha_{k-1} = 0,$$

stąd z założenia indukcyjnego $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. □

Wniosek 2.15.
Liczba różnych wartości własnych jest nie większa niż wymiar V.

Wniosek 2.16.
Niech $V' \subseteq V$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez wszystkie wektory własne endomorfizmu f i niech $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ będzie zbiorem wartości własnych endomorfizmu f. Wówczas

$$V' = V_{(\lambda_1)} \oplus \cdots \oplus V_{(\lambda_k)}.$$

Definicja 2.17 (Macierz diagonalizowalna)**.**
Macierz jest *diagonalizowalna* jeśli jest podobna do macierzy diagonalnej.

Stwierdzenie 2.18.
Macierz jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy suma wymiarów podprzestrzeni własnych jest równa wymiarowi przestrzeni.

Wniosek 2.19.
Jeśli macierz ma n różnych wartości w własnych, to jest diagonalizowalna.

Stwierdzenie 2.20.
Endomorfizm jest diagonalizowalny jeśli jest sumą prostą homotetii.

Przykład 2.21 (Przykłady endomorfizmów)**.**
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nie ma wektorów własnych nad $\mathbb{R}$. Ale nad $\mathbb{C}$ mamy bazę złożoną z wektorów własnych.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma wektor własny, ale wektory własne nie rozpinają całej przestrzeni. Rozszerzenie skalarów nic nie zmienia.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ są dwie różne wartości własne.

2.3 Wielomian charakterystyczny i wielomian minimalny

Definicja 2.22 (Wielomian charakterystyczny)**.**
Wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy wielomian

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A).$$

Stwierdzenie 2.23.
Skalar $\lambda \in K$ jest wartością własną wtedy i tylko wtedy, gdy $p_A(\lambda) = 0$.

Wniosek 2.24.
Jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to każdy endomorfizm przestrzeni V posiada wektor własny.

Stwierdzenie 2.25.
Wielomian charakterystyczny jest niezmiennikiem endomorfizmu.

Stwierdzenie 2.26.
Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ i niech

$$p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda_1 + c_0$$

będzie wielomianem charakterystycznym. Wówczas
- $c_n = 1$,
- $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$,
- $c_0 = (-1)^n \det(A)$.

Wniosek 2.27.
Wielomian charakterystyczny jest niezmiennikiem silniejszym (tj. odróżnia więcej endomorfizmów) niż ślad i wyznacznik. Nie jest jednak silniejszy niż rząd endomorfizmu.

W4 (5 III)

Definicja 2.28 (Wielomian minimalny)**.**
Wielomian minimalny $\mu_A(\lambda) \in K[\lambda]$ macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ to wielomian, który
- jest unormowany, tj. współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1,
- $\mu_A(A) = 0$,
- jeśli $w(\lambda) \in K[\lambda]$ ma tę własność, że $w(A) = A$, to $\mu_A(\lambda)$ dzieli $w(\lambda)$.

Stwierdzenie 2.29.
Każda macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ posiada dokładnie jeden wielomian minimalny.

Dowód. Układ $I, A, \ldots, A^{n^2}$ jest liniowo zależny w $M_{n\times n}(K)$, więc istnieje wielomian w taki że $w(A) = 0$. Niech $\mu_A(x)$ będzie unormowanym wielomianem najniższego możliwego stopnia o tej własności. Załóżmy, że $w(A) = 0$; niech $w(x) = \mu_A(x)v(x) + r(x)$ będzie dzieleniem z resztą. Wtedy $r(A) = 0$ i $\deg(r) < \deg(\mu_A)$, więc $r(x) = 0$ i $\mu_A(x)$ dzieli $w(x)$. □

Stwierdzenie 2.30.
Wielomian minimalny jest niezmiennikiem endomorfizmu.

Dowód. Jeśli C jest odwracalna, to $(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC$, a więc

$$w(C^{-1}AC) = C^{-1}w(A)C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(A) = 0.$$ □

Twierdzenie 2.31 (Cayley–Hamilton)**.**
Dla każdej macierzy A zachodzi $p_A(A) = 0$.

Wniosek 2.32.
Wielomian minimalny dzieli wielomian charakterystyczny.

Definicja 2.33.
Macierz dołączona macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ to macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n(K)}$ taka, że $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$, gdzie A_{ij} jest macierzą powstała przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy A.

Stwierdzenie 2.34.
Jeśli B jest dołączona do A, to $AB = BA = \det(A) \cdot I$.

Dowód tw. C-H.
Niech $B \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ będzie macierzą dołączoną do $\lambda I - A$ (o współczynnikach w $K[\lambda]$). Mamy

$$(\lambda I - A)B = \det(\lambda I - A)I = p_A(\lambda)I.$$

Ponieważ stopnie wielomianów w B nie przekraczają $n-1$, mamy przedstawienie

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i,$$

gdzie $B_i \in M_{n\times n}(K)$. Mamy

$$\begin{aligned} p_A(\lambda)I = (\lambda I - A)B = (\lambda I - A)\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i B_i = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{i+1}B_i - \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i AB_i \\ = \lambda^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda^i(B_{i-1} - AB_i) - AB_0. \end{aligned}$$

Oznaczmy $p_A(\lambda)I = \lambda^n I + \lambda^{n-1}c_{n-1}I + \cdots + \lambda c_1 I + c_0 I$. Wobec tego $B_{n-1} = I$, $-AB_0 = c_0 I$ oraz

$$B_{i-1} - AB_i = c_i I$$

dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ostatecznie

$$\begin{aligned} p_A(A) = A^n I + A^{n-1}c_{n-1}I + \cdots + A^2c_2I + Ac_1I + c_0I = \\ A^nB_{n-1} + A^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + A^{n-2}(B_{n-3} - AB_{n-2}) + \cdots + A(B_0 - AB_1) - AB_0 = 0. \end{aligned}$$ □

2.4 Podprzestrzenie niezmiennicze

Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni V wymiaru n nad ciałem K.

Definicja 2.35 (Podprzestrzeń niezmiennicza)**.**
Podprzestrzeń $W \subseteq V$ jest *f-niezmiennicza* jeśli $f(W) \subseteq W$. W szczególności $f|_W$ jest endomorfizmem przestrzeni W.

Definicja 2.36 (Rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze)**.**
Rozkład $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jest *f-niezmienniczy* jeśli wszystkie podprzestrzenie W_i są f-niezmiennicze.

Stwierdzenie 2.37.
Jeśli $W \subseteq V$ jest f-niezmiennicza. Niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będzie bazą V taką, że $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ jest bazą przestrzeni W. Wówczas

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} L & M \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

gdzie L jest macierzą $f|_W$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Uwaga 2.38.
Nie jest prawdą, że dla każdej podprzestrzeni f–niezmienniczej $W \subseteq V$ istnieje jej dopełnienie, tj. f–niezmiennicza podprzestrzeń $W' \subseteq V$ taka, że $V = W \oplus W'$.

Stwierdzenie 2.39.
Jeśli rozkład $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jest f-niezmienniczy, a $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest sumą baz przestrzeni W_i, to $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest blokowa diagonalna.

Definicja 2.40 (Przestrzeń nierozkładalna)**.**
Mówimy, że V jest *f-nierozkładalna* jeśli nie istnieje nietrywialny rozkład f-niezmienniczy przestrzeni V.

Stwierdzenie 2.41.
Niech $f \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje f-niezmienniczy rozkład

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

taki, że W_i jest $f|_{W_i}$-nierozkładalna.

2.5 Podprzestrzenie pierwiastkowe

Definicja 2.42 (Podprzestrzeń pierwiastkowa)**.**
Podprzestrzenią pierwiastkową endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ wartości własnej $\lambda \in K$ nazywamy przestrzeń

$$V_\lambda = \bigcup_{i>0} \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)^i.$$

Uwaga 2.43.
Oczywiście $V_{(\lambda)} \subseteq V_\lambda$, bo $V_{(\lambda)} = \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)$.

Stwierdzenie 2.44.
Istnieje $k = k(\lambda, f) \leqslant n$ takie, że

$$\ker(\lambda \,\mathrm{id} - f) \subsetneq \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)^k = \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)^{k+1} = \ldots$$

Dowód. Zawieranie jest oczywiste. Oznaczmy $g = (\lambda \,\mathrm{id} - f)$. Jeśli $\ker(g^i) = \ker(g^{i+1})$, to

$$\alpha \in \ker(g^{i+2}) \;\Leftrightarrow\; g(\alpha) \in \ker(g^{i+1}) \;\Leftrightarrow\; g(\alpha) \in \ker(g^i) \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \ker(g^{i+1}),$$

a więc $\ker(g^{i+1}) = \ker(g^{i+2})$. □

Wniosek 2.45.
Można przyjąć $V_\lambda = \ker(\lambda \,\mathrm{id} - f)^n$.

Stwierdzenie 2.46.
Podprzestrzeń pierwiastkowa jest niezmiennicza.

Dowód. Niech $\alpha \in \ker(\lambda\,\mathrm{id} - f)^k$. Wówczas

$$(\lambda\,\mathrm{id} - f)^k(f(\alpha)) = (\lambda\,\mathrm{id} - f)^k((\lambda\,\mathrm{id} - (\lambda\,\mathrm{id} - f))(\alpha)) = (\lambda\,\mathrm{id} - f)^k(\lambda\alpha) - (\lambda\,\mathrm{id} - f)^{k+1}(\alpha) = 0,$$

a więc $f(\alpha) \in V_\lambda$. □

Stwierdzenie 2.47.
Niech

$$V_\lambda^\perp = \bigcap_{i \geqslant 0} \mathrm{im}(\lambda\,\mathrm{id} - f)^i.$$

Wówczas:
(a) $V_\lambda^\perp = \mathrm{im}(\lambda\,\mathrm{id} - f)^{k(\lambda,f)} = \mathrm{im}(\lambda\,\mathrm{id} - f)^n$.
(b) $V_\lambda^\perp$ *jest podprzestrzenią* f*–niezmienniczą.*
(c) $V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp = V$.
(d) *Jeśli* $\mu \neq \lambda$, *to* $V_\mu \subseteq V_\lambda^\perp$.

Dowód. Punkt (a) wynika z porównania wymiarów, a punkt (b) dowodzi się tak jak niezmienniczość V_λ. Jeśli $0 \neq \alpha \in V_\lambda = \ker(\lambda\,\mathrm{id} - f)^n$ oraz $(\lambda\,\mathrm{id} - f)^n(\beta) = \alpha$ (tj. $\alpha \in V_\lambda^\perp$), to $\beta \in \ker(\lambda\,\mathrm{id} - f)^{2n} \setminus \ker(\lambda\,\mathrm{id} - f)^n = V - \lambda \setminus V_\lambda = \emptyset$, co prowadzi do sprzeczności i dowodzi (c).

Załóżmy, że $0 = \mu \neq \lambda$. Jeśli $\alpha \neq 0$ oraz $f(\alpha) = 0$, to

$$(\lambda\,\mathrm{id} - f)^n(\alpha) = \sum_{k=0} \lambda^{n-k}(-1)^k \binom{n}{k} f^k(\alpha) = \lambda^n \alpha \neq 0$$

a więc $\alpha \notin V_\lambda$. Stąd $\ker(f) \cap V_\lambda = 0$ co oznacza, że $f|_{V_\lambda}$ jest izomorfizmem, w szczególności

$$V_\lambda = f(V_\lambda) = \cdots = f^n(V_\lambda) \subseteq f^n(V) = V_0^\perp.$$

Punkt (d) dla dowolnego μ wynika z zawierania $V_0 \subseteq V_{\lambda-\mu}^\perp$ dla endomorfizmu $(f - \mu\,\mathrm{id})$. □

Stwierdzenie 2.48.
Załóżmy, że ciało K *jest algebraicznie domknięte,* $V \in \mathbf{Vect}_K$, $f \in \mathrm{End}(V)$. *Wówczas istnieje rozkład* V *na sumę prostą podprzestrzeni* f*–niezmienniczych:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda.$$

Dowód. Indukcja względem $n = \dim(V)$. Dla $n = 0$ stwierdzenie jest oczywiste, dla $n > 0$ niech $\lambda \in K$ będzie wartością własną, która istnieje z algebraicznej domkniętości K. Z założenia indukcyjnego i lematu mamy rozkład

$$V \overset{(c)}{=} V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp = V_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \neq \lambda} (V_\lambda^\perp)_\mu \overset{(d)}{=} V_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_\mu,$$

bo z punktu (d) lematu wynika, że $(V_\lambda^\perp)_\mu = V_\mu$ dla $\mu \neq \lambda$. □

Stwierdzenie 2.49.
Załóżmy, że $W \subseteq V$ *jest podprzestrzenią* f*–niezmienniczą. Wówczas* f *zadaje endomorfizm*

$$f/W : V/W \ni \alpha + W \mapsto f(\alpha) + W \in V/W$$

przestrzeni ilorazowej V/W *oraz* $p_f = p_{f|_W} p_{f/W}$. *W szczególności* $p_{f|_W}$ *dzieli* p_f.

Uwaga 2.50.
Z powyższego stwierdzenia wynika, że rozkład (V, f) na podprzestrzenie pierwiastkowe istnieje również wtedy, gdy p_f rozkłada się na iloczyn czynników nierozkładalnych.

Stwierdzenie 2.51.
Niech $V \in \mathbf{Vect}_K$, $f \in \mathrm{End}(V)$. *Jeśli* $p_f(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{d_i}$ *oraz* λ_i *są parami rózne, to* $\dim(V_{\lambda_i}) = d_i$.

W5 (10 III)

2.6 Opis podprzestrzeni f–niezmienniczych

Niech K będzie dowolnym ciałem, $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$, $f \in \mathrm{End}(V)$.

Lemat 2.52 (N)**.**
Niech $\alpha \in V$. Załóżmy, że $f^n(\alpha) = 0$ i $f^{n-1}(\alpha) \neq 0$. Wówczas układ $(\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{n-1}(\alpha))$ jest liniowo niezależny. W szczególności, jeśli $\dim(V) = n$, to $(f^i(\alpha))_{i=0}^{n-1}$ jest bazą V.

Dowód. Indukcja ze względu do n. Jeśli $n = 1$, to z założenia $\alpha = f^0(\alpha) \neq 0$, więc (α) jest układem liniowo niezależnym. Załóżmy, że $n > 1$ oraz że $c_0\alpha + c_1 f(\alpha) + \cdots + c_{n-1}f^{n-1}(\alpha) = 0$ dla pewnego ciągu liczb $c_0 \ldots, c_{n-1} \in K$. Mamy

$$\begin{aligned} 0 = f(0) = f(c_0\alpha + c_1 f(\alpha) + \cdots + c_{n-1}f^{n-1}(\alpha)) &= c_0 f(\alpha) + c_1 f^2(\alpha) + \cdots + c_{n-1}f^n(\alpha) \\ &= c_0 f(\alpha) + c_1 f^2(\alpha) + \cdots + c_{n-2}f^{n-1}(\alpha) \end{aligned}$$

więc z założenia indukcyjnego dla wektora $f(\alpha)$ dostajemy $c_0 = \cdots = c_{n-2} = 0$. Ale stąd $c_{n-1}f^{n-1}(\alpha) = 0$, więc również c_{n-1}. □

Lemat 2.53 (S)**.**
Jeśli $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ jest f-niezmienniczym rozkładem, to

$$\ker f = (V_1 \cap \ker(f)) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap \ker(f)).$$

Dowód. Zawieranie $\supseteq$ jest jasne. W drugą stronę — korzystamy z niezmienniczości rozkładu. □

Twierdzenie 2.54.
Niech $V \in \mathbf{Vect}_K$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\dim(V) = n$. Załóżmy, że
- *K jest algebraicznie domknięte (wystarczy, że p_f rozkłada się na iloczyn czynników liniowych),*
- *V jest f-nierozkładalna,*
- *0 jest wartością własną f.*

Wówczas $f^n = 0$, $f^{n-1}(0) \neq 0$.

Dowód.
A. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy $f = 0$, bo 0 jest wartością własną, więc teza jest spełniona.
B. Załóżmy, że $n > 1$. Ponieważ $\ker(f) \neq 0$, to $\dim(\mathrm{im}(f)) < n$. Niech
$$\mathrm{im}(f) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$
będzie f-niezmienniczym rozkładem na składniki f-nierozkładalne. Oznaczmy $n_i = \dim(V_i)$.
C. Po przenumerowaniu składników możemy zakładać, że 0 jest wartością własną składników $V_1, \ldots, V_s$, a nie jest wartością własną składników $V_{s+1}, \ldots, V_k$. Każdy składnik ma wektor własny, bo ich wielomiany charakterystyczne są iloczynami wielomianów stopnia 1.
D. Dla każdego $i = 1, \ldots, s$ wybierzmy wektor $\alpha_i \in V_i$ taki, że $f^{n_i}(\alpha_i) = 0$ oraz $f^{n_i-1}(\alpha_i) \neq 0$ — istnieje on z założenia indukcyjnego dla przestrzeni V_i. Następnie wybierzmy wektor $\beta_i \in V$ taki, że $f(\beta_i) = \alpha_i$ (istnieje, bo $\alpha_i \in \mathrm{im}(f)$). Oznaczmy $V_i' = \mathrm{lin}(V_i \cup \{\beta_i\})$. Oczywiście $f(V_i') \subseteq V_i \subseteq V_i'$, więc V_i' jest f-niezmiennicza.
E. Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią taką, że
$$\ker(f) = (\ker(f) \cap \mathrm{im}(f)) \oplus W.$$
Oczywiście W jest f-niezmiennicza (bo $W \subseteq \ker(f)$).
F. Udowodnimy, że $V = \mathrm{lin}(V_1' \cup \cdots \cup V_s' \cup V_{s+1} \cup \cdots \cup V_k \cup W)$. Niech $\alpha \in V$. Wówczas $f(\alpha)$ ma jednoznaczny rozkład
$$f(\alpha) = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k,$$
gdzie $\gamma_i \in V_i$. Dla $i \leqslant s$ mamy przestawienie $\gamma_i = c_i\alpha_i + f(\delta_i)$, gdzie $\delta_i \in V_i$ (korzystamy z faktu, że $(\alpha_i, f(\alpha_i), \ldots, f^{n_i-1}(\alpha_i))$ jest bazą V_i). Niech teraz
$$\alpha' := (c_1\beta_1 + \delta_1) + \cdots + (c_s\beta_s + \delta_s) + (f|_{V_{s+1}})^{-1}(\gamma_{s+1}) + \cdots + (f|_{V_k})^{-1}(\gamma_k).$$

Jest to dobra definicja, bo z założenia $f|_{V_i}$ jest odwracalne. Ponadto mamy

$$f(\alpha') = \sum_{i=1}^{s}(f(c_i\beta_i) + f(\delta_i)) + \sum_{i=s+1}^{k} f((f|_{V_i})^{-1}(\gamma_i)) = \sum_{i=1}^{s}(c_i\alpha_i + f(\delta_i)) + \sum_{i=s+1}^{k} \gamma_i = f(\alpha)$$

Wobec tego $f(\alpha - \alpha') = 0$, czyli $\alpha \in \mathrm{lin}(\{\alpha'\} \cup \ker(f))$. Ostatecznie

$$\alpha \in \mathrm{lin}(\bigcup_{i\leqslant s} V_i' \cup \bigcup_{i>s} V_i \cup \mathrm{im}(f) \cup W).$$

G. Zauważmy, że

$$\sum_{i\leqslant s}\dim(V_i') + \sum_{i>s}\dim(V_i) + \dim(W) = \dim(\mathrm{im}(f)) + s + \dim(\ker(f)) - \dim(\ker(f) \cap \mathrm{im}(f))$$
$$= n + s - \dim(\ker(f) \cap \mathrm{im}(f)).$$

Z lematu (S) powyżej mamy

$$\mathrm{im}(f) \cup \ker(f) = (V_1 \cap \ker(f)) \cap \cdots \cap (V_k \cap \ker(f)).$$

Ponadto $\dim(V_i \cap \ker(f)) = 1$ dla $i \leqslant s$ (z lematu (N)) i $\dim(V_i \cap \ker(f)) = 0$ dla $i > s$ (bo $f|_{V_i}$ jest izomorfizmem). Wobec tego $\dim(\ker(f) \cap \mathrm{im}(f)) = s$. Ostatecznie

$$\sum_{i\leqslant s}\dim(V_i') + \sum_{i>s}\dim(V_i) + \dim(W) = n + s - s = n.$$

Z poprzedniego punktu możemy więc wywnioskować, że istnieje f-niezminniczy rozkład.

$$V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_s' \oplus V_{s+1} \oplus \cdots \oplus V_k \oplus W.$$

H. Wobec założenia, że V jest f-nierozkładalna tylko jeden ze składników jest niezerowy. Mamy trzy przypadki:
- $V = W$. Ale wtedy $\dim(W) > 1$ i $f|_W = 0$, więc $W = V$ nie byłaby nierozkładalna.
- $V = V_i$. Ale wtedy 0 nie jest wartością własną V.
- $V = V_i' = \mathrm{lin}(V_i \cup \{\beta_i\})$. Wtedy $f^n = 0$ i $f^{n-1}(\beta_i) = f^{n-2}(\alpha_i) \neq 0$. Teza indukcyjna jest więc spełniona. □

W6 (12 III)

2.7 Postać Jordana

Poniżej zakładamy, że $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$, $n = \dim(V)$, $f \in \mathrm{End}(V)$ oraz K jest ciałem algebraicznie domkniętym lub przynajmniej że p_f rozkłada się na czynniki liniowe.

Definicja 2.55 (Klatka Jordana)**.**
Klatką Jordana o rozmiarze n i wartości własnej $\lambda \in K$ nazywamy macierz

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$

Wniosek 2.56.
Jeśli V jest f–nierozkładalna i ma wartość własną 0, to w pewnej bazie $\mathcal{B}$ mamy

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J_0^n$$

Dowód. Z Twierdzenia 2.54 wynika, że istnieje $\alpha \in V$ takie, że $f^{n-1}(\alpha) \neq 0$ i $f^n(\alpha) = 0$; ponadto z Lematu 2.52 wiemy, że $\mathcal{B} = (\alpha, f(\alpha), \cdots, f^{n-1}(\alpha))$ jest bazą V. Łatwo sprawdzić, że macierz f w ten bazie to J_0^n. □

Wniosek 2.57.
Jeśli V jest f–nierozkładalna, to dla pewnego λ w pewnej bazie $\mathcal{B}$ mamy

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J_\lambda^n$$

Dowód. Wiemy, że f ma pewną wartość własną $\lambda \in K$. Wobec tego $g = f - \lambda\,\mathrm{id}$ ma wartość własną 0. Z Wniosku 2.56 mamy $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J_0^n$ w pewnej bazie $\mathcal{B}$, a więc

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(g + \lambda\,\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J_0^n + \lambda I_n = J_\lambda^n.$$ □

Definicja 2.58 (Macierz Jordana)**.**
Macierzą w postaci Jordana (lub po prostu *macierzą Jordana*) nazywamy macierz postaci

$$\bigoplus_{i=1}^{k} J_{\lambda_i}^{n_i} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_3}^{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_k}^{n_k} \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 2.59 (Jordan)**.**
Niech $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że wielomian charakterystyczny p_f rozkłada się na iloczyn czynników liniowych. Wówczas istnieje baza $\mathcal{J}$ (zwana bazą Jordana*) taka, że $M(f)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ jest macierzą Jordana. Równoważnie: każda macierz jest podobna do macierzy w postaci Jordana.*

Dowód. Istnieje rozkład f–niezmienniczy

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

i każdy z jego składników ma wektor własny. Teza wynika z Wniosku 2.57. □

Wiemy już, że każdy endomorfizm jest zadany przez macierzą Jordana. Pozostaje rozstrzygnąć kiedy dwie macierze Jordana są podobne, tj. są macierzami tego samego endomorfizmu.

Stwierdzenie 2.60.
Dla dowolnego $\lambda \in K$, $k \geqslant 0$,

$$d(f, \lambda, k) = \dim(\ker((\lambda \cdot \mathrm{id} - f)^k))$$

jest niezmiennikiem endomorfizmu. Ponadto

$$d(J_\lambda^n, \mu, k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu, \\ k & \text{dla } \lambda = \mu,\ k \leqslant n, \\ n & \text{dla } \lambda = \mu,\ k \geqslant n. \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.61.
Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V, którego macierz w pewnej bazie jest macierzą Jordana. Wówczas liczba klatek J_λ^k w tej macierzy wynosi

$$2d(f, \lambda, k) - d(f, \lambda, k-1) - d(f, \lambda, k+1).$$

W szczególności liczba klatek Jordana ustalonego typu jest niezmiennikiem endomorfizmu.

Wniosek 2.62.
Macierze Jordana A i B są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda \in K$ i $k > 0$ obie macierze zawierają tą samą ilość klatek Jordana J_λ^k.

Dowód. Jeśli macierze zawierają taką samą ilość klatek danego typu, można uzyskać jedną z drugiej przez przenumerowanie bazy. Jeśli ilości są różne, wartości wyrażeń powyżej są różne, a są one niezmiennikami endomorfizmu. □

Stwierdzenie 2.63.
Niech $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$, $f \in \mathrm{End}(V)$ i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą Jordana f. Dla $\lambda \in K$ niech $\mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ układem zawierającym wszystkie wektory bazowe związane z wartością własną λ. Wówczas $V_\lambda = \mathrm{lin}(\mathcal{B}_\lambda)$. W szczególności mamy rozkład $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$.

2.8 Kategoria endomorfizmów

Podsumujemy uzyskane dotychczas wyniki używając terminów kategoryjnych.

Definicja 2.64. Niech $\mathbf{End}_K$ będzie kategorią, której obiektami są pary (V, f), gdzie
- V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K,
- $f : V \to V$ jest endomorfizmem V.

Zbiór morfizmów $\mathbf{End}_K((V, f), (W, g))$ po zbiór przekształceń liniowych $h : V \to W$ takich, że $hf = gh$, tzn. diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

jest przemienny. $\mathbf{End}_K$ będziemy nazywać w skrócie kategorią endomorfizmów.

Naszym celem jest opisanie klas izomorfizmu obiektów $\mathbf{End}_K$. Przypomnijmy podobne opisy w dwóch znanych już kategoriach. Obiekt w kategorii nazywa się *nierozkładalny* jeśli
- nie jest obiektem początkowym i
- nie jest sumą prostą dwóch obiektów nie będących obiektami początkowymi.

Przypomnijmy, że obiekt początkowy to taki, który posiada dokładnie jeden morfizm do dowolnego innego obiektu (np. $\emptyset$ w kategorii **Set** lub 0 w kategorii $\mathbf{Vect}_K$).

W kategorii $\mathbf{Set}^{fin}$ (skończonych) zbiorów:
- Jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) obiektem nierozkładalnym jest zbiór jednopunktowy.
- W każdy obiekt jest sumą prostą obiektów nierozkładalnych i ten rozkład jest jednoznaczny (oczywiście z dokładnością do izomorfizmu).

W kategorii $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ (skończenie wymiarowych) przestrzeni liniowych nad K:
- Jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) obiektem nierozkładalnym jest przestrzeń jednowymiarowa K.
- W każdy obiekt jest sumą prostą obiektów nierozkładalnych, a więc każda skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa jest izomorficzna z K^n.
- Rozkład nie jest jednoznaczny (jest równoznaczny z wyborem bazy).

Wróćmy do kategorii endomorfizmów $\mathbf{End}_K$. Każdy obiekt rozkłada się na sumę prostą obiektów nierozkładalnych (Stwierdzenie 2.41), ale opis obiektów nierozkładalnych uzyskaliśmy tylko w przypadku, gdy K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Wówczas
- Każdy obiekt nierozkładalny jest izomorficzny z (K^n, J_λ^n) dla pewnych $n > 0$, $\lambda \in K$ (formalnie J_λ^n oznacza endomorfizm, którego macierzą w bazie standardowej jest J_λ^n).
- Rozkład na obiekty nierozkładalne nie jest jednoznaczny, ale liczba składników poszczególnych klas izomorfizmu jest wyznaczona jednoznacznie.

Pozostaje jeszcze opisać morfizmy z kategorii endomorfizmów. Łatwo sprawdzić, że prawdziwe jest następujące:

Stwierdzenie 2.65.
Niech $(V, f), (W, g) \in \mathrm{End}_K$. *Niech* $f \oplus g \in \mathrm{End}(V \oplus W)$ *będzie endomorfizmem danym wzorem*

$$(f \oplus g)(\alpha, \beta) = (f(\alpha), g(\beta)), \qquad \alpha \in V, \beta \in W.$$

Wówczas $(V, f) \oplus (W, g) := (V \oplus W, f \oplus g)$ *jest zarówno sumą prostą jak i produktem obiektów* (V, f) *i* (W, g) *w kategorii* End_K.

Niech $(V, f) = \bigoplus_{i=1}^{k}(V_i, f_i)$ i $(W, g) = \bigoplus_{j=1}^{l}(W_j, g_j)$ będą rozkładami na nierozkładalne podprzestrzenie niezmiennicze. Z powyższego stwierdzenia wynika, że

$$\begin{aligned}
\mathbf{End}_K((V, f), (W, g)) &= \prod_{i=1}^{k} \mathbf{End}_K((V_i, f_i), (W, g)) && \text{Bo } \oplus \text{ jest sumą prostą} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \mathbf{End}_K((V_i, f_i), (W_j, g_j)) && \text{Bo } \oplus \text{ jest produktem}
\end{aligned}$$

Żeby opisać dowolne morfizmy, wystarczy więc wykonać następujące:

Ćwiczenie 2.66. Opisać zbiór (przestrzeń liniową) morfizmów $\mathbf{End}_K((K^n, J_\lambda^n), (K^m, J_\mu^m))$ dla dowolnych $m, n > 0$, $\lambda, \mu \in K$.

2.9 Rzeczywiste twierdzenie Jordana

Potrafimy już opisać klasy sprzężoności endomorfizmów przestrzeni liniowych nad ciałami algebraicznie domkniętymi, w szczególności nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Pozostaje naturalne pytanie: czy można uzyskać podobny opis dla przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych? Okazuje się, że odpowiedź jest twierdząca. Dzięki temu, że ciało liczb rzeczywistych jest "prawie" algebracznie domknięte (formalnie: wymiar algebraicznego domknięcia $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$ wynosi 2), odpowiednik tw. Jordana dla $\mathbb{R}$ można wyprowadzić z tw. Jordana dla $\mathbb{C}$.

Najpierw musimy zrozumieć związki pomiędzy przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$. Przestrzeń $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ zadaje przestrzeń $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ — po prostu zapomniamy o mnożeniu przez nierzeczywiste skalary zespolone. Inaczej mówiąc, mamy funktor zapominania

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}.$$

Proszę zauważyć, że ta operacja zmienia wymiar: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$. Jeśli $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest $\mathbb{C}$–bazą V, to

$$(\beta_1, i\beta_1, \beta_2, i\beta_2, \ldots, \beta_n, i\beta_n)$$

jest $\mathbb{R}$–bazą V.

W drugą stronę jest trudniej. Ustalmy $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$, $\dim(V) = n$.

Definicja 2.67 (Kompleksyfikacja)**.**
Kompleksyfikacją przestrzeni V nazywamy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$

$$V^{\mathbb{C}} := \{\alpha + \beta j \mid \alpha, \beta \in V\}$$

(j jest tu tylko symbolem mającym się kojarzyć z liczbą $i \in \mathbb{C}$) z dodatkowym działaniem $\mathbb{C}$:

$$(a + bi)(\alpha + \beta j) = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)j.$$

Jest to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$.

Łatwo pokazać, że

Stwierdzenie 2.68.
Jeśli $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *jest* $\mathbb{R}$*–bazą* V*, to*
- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *jest też* $\mathbb{C}$*–bazą* $V^{\mathbb{C}}$*,*
- $(\alpha_1, \alpha_1 j, \ldots, \alpha_n, \alpha_n j)$ *jest* $\mathbb{R}$*–bazą* $V^{\mathbb{C}}$*.*

Dygresja: w terminach kategoryjnych mamy:

Uwaga 2.69.
Kompleksyfikacja zadaje funktor $(-)^{\mathbb{C}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$: jeśli $f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $f^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ definiujemy wzorem

$$f^{\mathbb{C}}(\alpha + \beta j) = f(\alpha) + f(\beta) j.$$

Ćwiczenie 2.70. Sprawdzić, że kompleksyfikacja jest lewym funktorem dołączonym do funktora zapominania.

Niech teraz $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Zastosujemy (zespolone) twierdzenie Jordana do przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$ z endomorfizmem $f^{\mathbb{C}}$. Wybierzmy $\mathbb{R}$–bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V; jest to również $\mathbb{C}$–baza przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$. Zauważmy, że

$$M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = M(f^{\mathbb{C}})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}.$$

Potrzebne nam będzie przekształcenie liniowe $t : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$

$$t(\alpha + \beta j) = \alpha - \beta j.$$

Stwierdzenie 2.71 (Własności endomorfizmu t)**.**
(a) $t^2 = \mathrm{id}$.
(b) *t jest przekształceniem $\mathbb{R}$–liniowym.*
(c) *t jest przekształceniem anty–$\mathbb{C}$–liniowym, tj. $t(z\gamma) = \bar{z}t(\gamma)$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $\gamma \in V^{\mathbb{C}}$.*
(d) $V = \{\gamma \in V \mid t(\gamma) = \gamma\}$.
(e) $t \circ f^{\mathbb{C}} = f^{\mathbb{C}} \circ t$ *dla* $f \in \mathrm{End}(V)$.
(f) *Jeśli $W \subseteq_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$ jest $\mathbb{C}$–podprzestrzenią i $W = tW$, to $W = (W \cap V)^{\mathbb{C}}$.*

Dowód. Nietrywialny jest tylko ostatni podpunkt. Jeśli $\gamma = \alpha + \beta j \in W$, gdzie $\alpha, \beta \in V$ to mamy

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\gamma + t(\gamma)) \in W \qquad \text{bo } tW = W$$
$$\beta = \tfrac{1}{2i}(\gamma - t(\gamma)) \in W \qquad \text{bo dodatkowo } \tfrac{1}{2i}W \subseteq W$$

a więc $\alpha, \beta \in V \cap W$, $\gamma \in (V \cap W)^{\mathbb{C}}$. Zawieranie $(V \cap W)^{\mathbb{C}} \subseteq W$ jest oczywiste. □

Poniższe stwierdzenie opisuje podprzestrzenie pierwiastkowe $V^{\mathbb{C}}$ z endomorfizmem $f^{\mathbb{C}}$:

Stwierdzenie 2.72.
Dla $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy

$$V^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}} = t(V^{\mathbb{C}}_{\lambda})$$

oraz

$$V^{\mathbb{C}}_{(\bar{\lambda})} = t(V^{\mathbb{C}}_{(\lambda)})$$

W szczególności, γ jest wektorem własnym $f^{\mathbb{C}}$ o wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy $t(\gamma)$ jest wektorem własnym o wartości własnej $\bar{\lambda}$.

Dowód. Pokażemy tylko pierwszą równość, drugą dowodzi się tak samo. Mamy

$$\gamma \in V^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}} \;\Leftrightarrow\; (\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - f^{\mathbb{C}})^n(\gamma) = 0 \;\Leftrightarrow\; t(\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - f^{\mathbb{C}})^n(\gamma) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda\,\mathrm{id} - f^{\mathbb{C}})^n t(\gamma) = 0 \;\Leftrightarrow\; t(\gamma) \in V^{\mathbb{C}}_{\lambda}.$$

Korzystamy tu z własności (c) i (e) poprzedniego stwierdzenia. □

Twierdzenie 2.73 (Rzeczywiste twierdzenie Jordana)**.**
Niech $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że V jest f–nierozkładalna. Wówczas macierz f w pewnej bazie $\mathcal{B}$ ma postać

$$\begin{pmatrix} A & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$$

gdzie $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ lub $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dowód. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_s, \mu_1 \dots, \mu_r$ będą różnymi zespolonymi wartościami własnymi $f^{\mathbb{C}}$, przy czy zakładamy, że $\lambda_k \notin \mathbb{R}$ oraz $\mu_k \in \mathbb{R}$. Ze Stwierdzenia 2.72 wiemy, że sprzężenie wartości własnej jest wartością własną oraz $V^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}_i} a = t V^{\mathbb{C}}_{\lambda_i}$. Istnieje więc rozkład na podprzestrzenie $f^{\mathbb{C}}$–niezmiennicze:

$$(V^{\mathbb{C}}_{\lambda_1} \oplus t V^{\mathbb{C}}_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (V^{\mathbb{C}}_{\lambda_s} \oplus t V^{\mathbb{C}}_{\lambda_s}) \oplus V^{\mathbb{C}}_{\mu_1} \oplus \dots \oplus V^{\mathbb{C}}_{\mu_r}.$$

Każdy z tych składników spełnia zależność $W = tW$, a więc $W = (W \cap V)^{\mathbb{C}}$. Wobec tego mamy rozkład na podprzestrzenie f–niezmiennicze

$$V = U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_c} \oplus U_{\mu_1} \oplus \dots \oplus U_{\mu_r},$$

gdzie $U_{\lambda_j} = (V^{\mathbb{C}}_{\lambda_j} \oplus t V^{\mathbb{C}}_{\lambda_j}) \cap V$, $U_{\mu_j} = V^{\mathbb{C}}_{\mu_j} \cap V$. Z założenia nierozkładalności wiemy, że jest tylko jeden składnik. Jeśli jest to składnik związany z rzeczywistą wartością własną, to p_f rozkłada się na czynniki liniowe, a więc jest w postaci Jordana (przypadek $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ w sformułowaniu twierdzenia).

Załóżmy więc, że $s = 1$, $\lambda = \lambda_1 = a + bi$ oraz $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{C}}_{\lambda} \oplus V^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}$. Z zespolonego tw. Jordana istnieje baza Jordana $V^{\mathbb{C}}_{\lambda}$, tj. baza $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ taka, że

$$f^{\mathbb{C}}(\gamma_k) = \begin{cases} \lambda \gamma_k + \gamma_{k+1} & \text{dla } k < n \\ \lambda \gamma_k & \text{dla } k = n. \end{cases}$$

Mamy

$$f^{\mathbb{C}}(t(\gamma_k)) = t(f^{\mathbb{C}}(\gamma_k)) = \begin{cases} t(\lambda \gamma_k + \gamma_{k+1}) = \bar{\lambda} t(\gamma_k) + t(\gamma_{k+1}) & \text{dla } k < n \\ t(\lambda \gamma_k) = \bar{\lambda} t(\gamma_k) & \text{dla } k = n. \end{cases}$$

a więc $(t(\gamma_1, \dots, t(\gamma_n)))$ jest bazą Jordana $V^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}$.

Niech

$$\alpha_k = \tfrac{1}{2}(\gamma_k + t(\gamma_k)), \qquad \beta_k = \tfrac{1}{2i}(\gamma_k - t(\gamma_k)).$$

Ponieważ

$$t(\alpha_k) = \tfrac{1}{2}(t(\gamma_k) + t(t(\gamma_k))) = \tfrac{1}{2}(t(\gamma_k) + \gamma_k) = \alpha_k$$

$$t(\beta_k) = t(\tfrac{1}{2i}(\gamma_k - t(\gamma_k))) = -\tfrac{1}{2i}(t(\gamma_k) - t(t(\gamma_k)))) = -\tfrac{1}{2i}(t(\gamma_k) - \gamma_k)) = \beta_k$$

wiemy, że $\alpha_k, \beta_k \in V$. Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(\alpha_k, \beta_k) = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(\gamma_k, t(\gamma_k))$. Stąd wynika, że

$$\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(\gamma_1, t(\gamma_1), \dots, \gamma(n), t(\gamma_n)) = V^{\mathbb{C}},$$

a więc układ $\mathcal{B} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n)$ stanowi $\mathbb{C}$–bazę $V^{\mathbb{C}}$, więc stanowi również $\mathbb{R}$–bazę V.

Obliczymy teraz macierz $f : V \to V$ w bazie $\mathcal{B}$. Mamy

$$f(\alpha_n) = \tfrac{1}{2} f^{\mathbb{C}}(\gamma_n + t(\gamma_n)) = \tfrac{1}{2}(\lambda \gamma_n + \bar{\lambda} t(\gamma_n)) = \tfrac{1}{2}((a + bi)(\alpha_n + \beta_n j) + (a - bi)(\alpha_n - \beta_n j)) = a\alpha_n - b\beta_n.$$

$$f(\beta_n) = \tfrac{1}{2i} f^{\mathbb{C}}(\gamma_n - t(\gamma_n)) = \tfrac{1}{2i}(\lambda \gamma_n - \bar{\lambda} t(\gamma_n)) = \tfrac{1}{2i}((a + bi)(\alpha_n + \beta_n j) - (a - bi)(\alpha_n - \beta_n j)) = b\alpha_j + a\beta_j.$$

Dla $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ w podobny sposób uzyskujemy równości

$$f(\alpha_k) = a\alpha_k - b\beta_k + \alpha_{k+1},$$
$$f(\beta_k) = b\alpha_k + a\beta_k + \beta_{k+1}.$$

co dowodzi tezy. $\square$

Na koniec ćwiczenie związane z tematem.

Ćwiczenie 2.74. Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ w bazach standardowych. Niech

$$\mathcal{A} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_n, ie_n)$$
$$\mathcal{B} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_m, ie_m)$$

będą bazami $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ traktowanych jako przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$. Wyrazić $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ za pomocą A.