ZADANIA GAL*

1. Różne

1.1. Niech K będzie ciałem, a $n \geqslant 1$ liczbą naturalną. Mówimy, że para (K, n) ma własność O, jeśli dla każdej pary macierzy $A, B \in M_{n\times n}(K)$ takiej, że B jest odwracalna, istnieje $t \in K$ takie, że macierz $C_t = A + tB$ jest nieodwracalna.

(a) Dla jakich $n \geqslant 1$ para $(\mathbb{C}, n)$ ma własność O?
(b) Dla jakich $n \geqslant 1$ para $(\mathbb{R}, n)$ ma własność O?
(c) Dla jakich $n \geqslant 1$ istnieje ciało K takie, że (K, n) nie ma własności O?
(d) Czy dla każdej pary (K, n) i każdego wielomianu $w(t) \in K[t]$ stopnia n istnieją macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ takie, że $\det(A + tB) = w(t)$?

1.2. Dany jest $\mathbb{C}$–liniowy endomorfizm $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Niech $\det_{\mathbb{C}}(f)$ (odpowiednio $\det_{\mathbb{R}}(f)$) będzie wyznacznikiem f traktowanego jako endomorfizm przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{C}$ (odpowiednio: $\mathbb{R}$). Wyrazić $\det_{\mathbb{R}}(f)$ za pomocą $\det_{\mathbb{C}}(f)$.

1.3. Niech K będzie ciałem, a $V \subseteq K[x]$ dowolną podprzestrzenią liniową. Udowodnić, że V posiada bazę złożoną z wielomianów o różnych stopniach:

(a) Przy założeniu, że V jest skończenie wymiarowa.
(b) Bez tego założenia.

1.4. Dane są przestrzenie wektorowe V, W nad ciałem K, $\dim(V) = m$, $\dim(W) = n$.

(a) Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ będzie bazą V, a $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ bazą W. Znaleźć bazę γ_{ij} przestrzeni $\mathrm{Hom}(V, W)$ taką, że jeśli $M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$, to $f = \sum_i \sum_j a_{ij}\gamma_{ij}$.
(b) Dla dowolnego endomorfizmu $g : W \to W$ wyrazić wyznacznik endomorfizmu

$$g_* : \mathrm{Hom}(V, W) \ni f \mapsto g \circ f \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

za pomocą $\det(g)$.
(c) Dla dowolnego endomorfizmu $h : V \to V$ wyrazić wyznacznik endomorfizmu

$$g_* : \mathrm{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f \circ h \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

za pomocą $\det(h)$.

2. Homomorfizmy

We wszystkich poniższych zadaniach V, W, ... oznaczają przestrzenie wektorowe nad ciałem K.

2.1. Znaleźć bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n/V$ oraz macierz $M(q)^{\mathcal{B}}_{st}$ homomorfizmu ilorazowego $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/V$ jeśli

(a) $n = 3$, $V = \mathrm{lin}((1, 2, 0), (-1, -1, 0))$
(b) $n = 4$, $V = \mathrm{lin}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$
(c) $V = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_n = 0\}$
(d) $V = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_n = 0,\ \sum_{i=1}^{n} ix_n = 0\}$

Czy zawsze można wybrać bazę złożoną z warstw wektorów bazy standardowej?

2.2. Udowodnić, że dla dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$ istnieje dokładnie jeden endomorfizm

$$g_f : V/\ker(f) \to V/\ker(f)$$

taki, że $g_f \circ q = q \circ f$, gdzie $q : V \to V/\ker(f)$ jest przekształceniem ilorazowym. Czy

2.3. Czy istnieją endomorfizmy $f, f' : V \to V$ tanie, że $f \neq f'$, $\ker(f) = \ker(f')$ oraz $g_f = g_{f'}$?

2.4. Dla endomorfizmu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ znaleźć bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathrm{coim}(f) := V/\ker(f)$ oraz macierz przekształcenia g_f o którym mowa powyżej w tej bazie, jeśli

(a) $n = 3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2)$
(b) $n = 4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3 - 2x_4, x_1 + x_3 + 3x_4, x_1 + x_2 + x_4)$
(c) $f(x_1, \ldots, x_n) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

2.5. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ zapisać w postaci iloczynu $A = BC$, gdzie $B \in M_{m\times r}(K)$, $C = M_{r\times n}(K)$, a r jest rzędem macierzy A.

(a) $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}$

2.6. Niech V, W, Y, V', W' będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Skonstruować kanoniczne (tj. nie zależące od wyboru bazy) izomorfizmy.

(a) $V/W \simeq (V/Y)/(W/Y)$ dla $Y \subseteq W \subseteq V$.
(b) $(V \oplus W)/(V' \oplus W') \simeq (V/V') \oplus (W/W')$ dla $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$.
(c) $(V \oplus W)^* \simeq V^* \oplus W^*$
(d) $\operatorname{Hom}(Y, V/W) \simeq \operatorname{Hom}(Y, V)/\operatorname{Hom}(Y, W)$.

3. Kategorie

3.1. Udowodnić, że kategoria $\mathbf{Set}_*$, której obiektami są zbiory z wyróżnionym punktem, a morfizmami funkcje zachowujące punkt wyróżniony, jest kategorią.

3.2. Pokazać, że przyporządkowanie przestrzeni liniowej zbioru jej wektorów jest funktorem $\mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}_*$.

3.3. Pokazać, ze przyporządkowanie zbiorowi X przestrzeni liniowej

$$K[X] = \left\{ \sum_{x\in X} c_x x : \text{ prawie wszystkie } c_x \text{ są zerowe} \right\}$$

jest funktorem $\mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_K$.

3.4. Obliczyć granicę prostą i odwrotną diagramu $V \to W$.

3.5. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}$ ma obiekt początkowy a_0, to dla dowolnego funktora $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ zachodzi $lim\ F = F(a_0)$.

3.6. Obliczyć granice proste diagramów

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 & \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} & \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

3.7. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią z jednym obiektem a i morfizmami $\{id_a, t\}$, gdzie $t^2 = id_a$. Niech $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ będzie funktorem takim, że $F(a) = \mathbb{R}^2$ oraz

(a) $F(t)(x, y) = (x, y)$,
(b) $F(t)(x, y) = (-x, -y)$,
(c) $F(t)(x, y) = (y, x)$.

Obliczyć granicę prostą i odwrotną funktora F.

4. Wektory i wartości własne

4.1. Znaleźć wektory i wartości własne macierzy
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Niech K będzie ustalonym ciałem. Dla wielomianu $w(x) \in K[x]$ oznaczmy
$$w(x)K[x] := \{w(x)v(x) \in K[x] : \ v(x) \in K[x]\}.$$
Dany jest endomorfizm
$$f : K[x]/w(x)K[x] \ni v(x) + w(x)K[x] \mapsto xv(x) + w(x)K[x] \in K[x]/w(x)K[x].$$
(a) Znaleźć wektory i wartości własne f jeśli $K = \mathbb{C}$ i $w(x) = x^n - 1$.
(b) Opisać wektory i wartości własne f w ogólnym przypadku.

4.3. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą odwracalną. Wyrazić wartości własne macierzy A^{-1} za pomocą wartości własnych A.

4.4. Endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny jesli $f^k = 0$ dla dostatecznie dużego k.
(a) Udowodnić, że jeśli $f \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny i $\dim(V) = n$, to $f^n = 0$. Podać przykład nilpotentnego endorfizmu takiego, że $f^{n-1} \neq 0$.
(b) Znaleźć wszystkie klasy nilpotentnych endomorfizmów $\mathbb{R}^n$ dla $n \leqslant 4$.

4.5. Dany jest endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Wyrazić
$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||f^n(\alpha)||}$$
w terminach wartości własnych f.

4.6. Dla grafu Γ o n wierchołkach definiujemy macierz grafu $A(\Gamma) = (a_{ij})$ wzorem
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \text{ i } b \text{ są połączone krawędzią,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$
Obliczyć wartości własne i wektory własne:
(a) grafu pełnego,
(b) gwiazdy,
(c) ciągu,
(d) okręgu.

4.7. Obliczyć
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -16 & 13 \end{pmatrix}^n$$

4.8. Znaleźć postać Jordana i bazę Jordana macierzy
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{(g)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(h)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 9 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.9. Znaleźć postać Jordana macierzy $J_n(\lambda)^k$, gdzie $J_n(\lambda)$ jest klatką Jordana $n \times n$ o wartości własnej λ.

4.10. Wyrazić wielomian minimalny macierzy $A \oplus B$ za pomocą wielomianów minimalnych macierzy A i B.

4.11. Znaleźć wielomian minimalny macierzy $J_n(\lambda)$.

4.12. Znaleźć postać i bazę Jordana:

(a) $w_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A-I)^2 = \begin{pmatrix} -12 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (A-I)^3 = 0.$$

(b) $w_B(\lambda) = (1-\lambda)^3$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (B-I)^2 = 0.$$

4.13. Znaleźć postać i bazę Jordana:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^3 = 0.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ -18 & -5 & -8 & -5 & -21 & 7 \\ -4 & -1 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ -4 & -1 & -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & -1 & -2 & -2 \\ -8 & -2 & -4 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = 0.$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -8 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 11 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -7 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 10 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^5 = 0.$$

(d) $w_D(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (D+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(e) $w_E = -\lambda^3(\lambda-1)^2$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (E-I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Przestrzenie afiniczne i rzutowe

5.1. Dana jest podprzestrzeń $H = \{(x, y, z) : \ 3x + y - z = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz rzut $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na płaszczyznę $M = \mathrm{af}((0,1,0),(2,1,-1),(1,1,1))$ wzdłuż wektora $\alpha = (0,1,1)$.
(a) Znaleźć wzór na f.
(b) Znaleźć układ równań opisujący $f(M)$.

5.2. Znaleźć bazę punktową przestrzeni afinicznej $A \cap B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^4$ gdzie

$$A = \mathrm{af}((1,0,0,1),(2,1,1,1),(0,1,-1,0),(1,1,1,1)), \qquad B = \mathrm{af}((0,0,0,1),(1,-1,-1,-1),(2,3,4,5)).$$

5.3. Zbadać, dla jakich $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$f(1,2) = (1,1), \qquad f(2,-1) = (2,6), \qquad f(-1,-3) = (0,-4), \qquad f(1,5) = (a,b).$$

5.4. Znaleźć macierz przekształcenia

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto (2x - y - z + 1, x + y - 2z + 2) \in \mathbb{R}^2$$

w bazach punktowych $((1,1,1),(1,2,3),(0,1,0),(-1,1,0))$ oraz $((2,1),(1,1),(0,-1))$.

5.5. Znaleźć równanie opisujące podprzestrzeń $\mathrm{af}(L \cup L') \subseteq \mathbb{R}^4$, gdzie

$$L = \{(1+t, 2, -t, 2t) \in \mathbb{R}^4 : \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad L' = \{(2t, t+1, 0, t) \in \mathbb{R}^4 : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

5.6. Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ istnieje prosta równoległa do płaszczyzny

$$P = \{(x, y, z : \ x + 2y - z = 4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

przechodząca przez punkty $(1,0,0)$ i $(2,s,3)$?

5.7. Dane są płaszczyzny

$$L_1 = \{(x,y,z) : \ x + y + z = 2\}, \qquad L_2 = \{(x,y,z) : \ 2x - y = 1\}$$

Znaleźć równanie płaszczyzny L_3 takiej, że $(1,2,3) \in L_3$ oraz $\dim(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = 1$.

5.8. Znaleźć równanie parametryczne prostej $L \subseteq \mathbb{R}^3$, która przechodzi przez punkt $(1,1,1)$ oraz przecina proste

$$L_1 = \{(t, 2t+1, 1-t) : \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad L_2 = \{(2+2t, -t, 3) : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

5.9. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, aby przekształcenie afiniczne $f : A \to A$ było
(a) przesunięciem o wektor,
(b) rzutem na podprzestrzeń,
(c) symetrią względem podprzestrzeni,
(d) obrotem (dla $K = \mathbb{R}$),
(e) przekształceniem skończonego rzędu (K algebraicznie domknięte),
(f) miało punkt stały.

5.10. Znaleźć wszystkie klasy równoważności automorfizmów afinicznych $\mathbb{R}^2$.

5.11. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmów

$$f(x,y) = (x+1, x+2y+3), \qquad g(x,y,z) = (2z+1, 3x+2, 4y+3).$$

5.12. Udowodnić twierdzenie Cevy.

5.13. Znaleźć wszystkie izomorfizmu równoważności automorfizmów afinicznych $\mathbb{R}^2$.

5.14. Opisać wszystkie klasy izomorfizmu afinicznego czworokątów wypukłych.

5.15. Opisać wszystkie automorfizmy afiniczne, które zachowują
(a) sympleks Δ^n,
(a) n-kąt foremny,
(a) sześcian.

5.16. Opisać wielościan dualny do graniastosłupa, którego podstawą jest n-kąt foremny.

5.17. Udowodnić, że jeśli (p_i), (q_i) są trójkami różnych punktów na przestrzeni rzutowej, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ takie, że $f(p_i) = q_i$.

5.18. W powyższym zadaniu znaleźć warunek na to, aby punkty $f(p_4) = q_4$.

5.19. Znaleźć wzór na przekształcenie rzutowe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ takie, że $f([1:0]) = [x_1 : x_2]$, $f([0,1]) = [y_1 : y_2]$, $f([1:1]) = [z_1 : z_2]$.

6. Przekształcenia dwuliniowe

6.1. Sprawdzić, że mnożenie wielomianów zadaje przekształcenie dwuliniowe $K[x] \times K[x] \to Kx$.

6.2. Znaleźć macierz przekształcenia dwuliniowego $K[x]/(x^n) \times K[x]/(x^n) \to K[x]/(x^n)$ zadanego przez mnożenie w bazie standardowej.

6.3. Pokazać, że istnieje naturalny izomorfizm $K[x, y] \cong K[x] \otimes K[y]$.

6.4. Niech $T : K^n \otimes K^n \to K^n \otimes K^n$ dane będzie wzorem $T(x \otimes y) = y \otimes x$. Znaleźć bazy przestrzeni $\ker(T - \mathrm{id})$ oraz $\ker(T + \mathrm{id})$.

6.5. Dla przestrzeni wektorowych $W \subseteq V$, X skonstruować kanoniczny izomorfizm $(V/W) \otimes X \cong (V \otimes X)/(W \otimes X)$.

6.6. Podać przykład przekształcenia $V \otimes W \to V \otimes W$, którego nie da się przedstawić w postaci $f \otimes g$ dla $f \in \mathrm{End}(V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$.

6.7. Sprawdzić dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ wzór

$$f((x, y), (x', y')) = axx' + b(xy' + x'y) + c(yy')$$

zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$.

6.8. Udowodnić, że dla dowolnego iloczynu skalarnego $\langle -, - \rangle$ na V zbiór

$$B(0, r) = \{\alpha \in V : ||\alpha|| \leqslant c\}$$

jest wypukły. Znaleźć jego wierchołki.

6.9. Udowodnić, że dla dowolnego wektora $\alpha \in V$ przestrzeni unitarnej V i dowolnej podprzestrzeni $W \subseteq V$ funkcja

$$\varrho : W \ni \beta \mapsto ||\alpha - \beta|| \in \mathbb{R}$$

przyjmuje minimum w dokładnie jednym punkcie.

6.10. Pokazać, że podzbiór $V^* \otimes V^*$ składający się ze wszystkich iloczynów skalarnych jest wypukły.

6.11. Niech C będzie przestrzenią funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$. Udowodnić, że

$$C \times C \ni (f, g) \mapsto \int_0^1 fg \in \mathbb{R}$$

jest iloczynem skalarnym.

6.12. Znaleźć macierz symetrii prostopadłej względem $\{(x, y, z) : \ x - y + 2z = 0\}$ w bazie standardowej.

6.13. Przeprowadzić ortogonalizację Grama–Schmidta na układzie wektorów

$$\alpha_1 = (0, 1, 1, 0), \ \alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \ \alpha_3 = (1, 1, 1, 1), \ \alpha_4 = (1, 2, 3, 4)$$

przestrzeni $\mathbb{R}^4$ za standardowym iloczynem skalarnym.

6.14. Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Udowodnić, że macierz A zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^3$.
(b) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z tym iloczynem skalarnym (np. przez ortonormalizację bazy standardowej).
(c) Znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $(1, 2, 3)$ przy użyciu iloczynu skalarnego zadanego przez macierz A.
(d) Rozwiązać zadanie 6.12 przy użyciu tego iloczynu skalarnego.

6.15. Niech $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ będzie podprzestrzenią wielomianów stopnia mniejszego niż 4 w przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle v, w \rangle = \int_1^{-1} vw.$$

Znaleźć bazę ortonormalną V.

6.16. Niech $t \in \mathbb{R}$ i niech $f_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2 + 2(x_2y_3 + x_3y_2) + tx_3y_3.$$

(a) Dla jakich wartości parametru t funkcja f_t zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^3$?

(b) Znaleźć wzór na rzut prostopadły na płaszczyznę $x_3 = 0$ z iloczynem skalarnym f_3.

6.17. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność
$$(a+b+c)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2}.$$

6.18. Udowodnić, że dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma \in V$ zachodzi
$$\|\alpha-\gamma\|^2 + \|\beta-\gamma\|^2 = \tfrac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 + 2\|\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\gamma\|^2$$

6.19. Niech f będzie izometrią $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Pokazać, że

(a) Każda wartość własna f jest równa 1 lub -1.
(b) Jeśli $\det(f) = 1$, to f jest obrotem.
(c) $\det(f) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń punktów stałych f ma wymiar nieparzysty.
(d) Jeśli $\det(f) = -1$, to istnieje prosta L taka, że f jest złożeniem obrotu wokół L z symetrią względem $L^\perp$.

6.20. Czy istnieje rodzina funkcji ciągłych $a_{ij}(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1,2\}$ taka, że $A_0 = I$, $A_1 = -I$, gdzie
$$A_t = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$
oraz dla każdego $t \in [0,1]$ macierz A_t jest

(a) symetryczna i odwracalna,
(b) ortogonalna?

6.21. Pokazać, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest antysymetryczna, to $(A-I)^{-1}(A+I)$ jest ortogonalna i 1 nie jest wartością własną.

6.22. Znależć równanie parametryczne podprzestrzeni M, która zawiera $(1,2,1,0)$ i jest prostopadła do prostej $(-1,2,0,2)+t(1,1,1,-1)$.

6.23. Znaleźć wzór na odległość punktu $p = (x_1, \ldots, x_n)$ do płaszczyzny zadanej równaniem $\sum a_i x_1 = b$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jak zmieni się ten wzór jeśli używamy innego iloczynu skalarnego?

6.24. Obliczyć

(a) odległość pomiędzy prostą $(1,2,3)+t(1,1,1)$ a prostą $(0,1,1)+t(2,0,-1)$.
(b) odległość pomiędzy płaszczyzną
$$L = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$
a prostą $(1,2,1,0,0)+t(0,0,0,1,1)$.

6.25. Pokazać, że każda macierz unitarna jest diagonalizowalna.

6.26. Pokazać, że jeśli e^{tA} jest macierzą ortogonalną/unitarną dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to A jest macierzą antysymetryczną/antyhermitowską.

6.27. Oznaczmy $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, gdzie 1 znjduje się na i-tym miejscu. Znaleźć miarę zbioru

(a) $\operatorname{lin}\{(0,0,0),(1,1,0),(2,-1,1)\}$
(b) $\operatorname{lin}\{(0,0,0),(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,0)\}$
(c) $\operatorname{lin}\{(0,0,0),(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,0),(2,0,-1)\}$
(d) $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n, -e_1, \ldots, -e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$
(e) $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$

6.28. Zortonormalizować układ wektorów $(1,i,0)$, $(2+i,1,-i)$, $(0,1,1)$ w $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

6.29. Pokazać, że każda macierz unitarna jest diagonalizowalna.

6.30. Znaleźć bazę ortonormalną endomorfizmu $\mathbb{R}^3$ danego macierzą
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & -16 \\ 14 & -16 & 5 \end{pmatrix}$$

6.31. Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest normalna jeśli $\bar{A}^T A = A\bar{A}^T$. Pokazać, że każda macierz normalna górnotrójkątna jest diagonalna.

7. Formy dwuliniowe

7.1. Sklasyfikować formy kwadratowe na przestrzeni wymiaru 1 nad dowolnym ciałem.

7.2. Pokazać, że każde dwie niezdegenerowane formy symetryczne z wektorem izotropowym są izomorficzne. Każdy element ciała jest wartością takiej formy.

7.3. Przestrzeń z poprzedniego zadania nazywa się płaszczyzną hiperboliczną $\mathbb{H}$. Pokazać, że dla każdej przestrzeni V z formą symetryczną f istnieje rozkład

$$V = Z \oplus \mathbb{H}^k \oplus V'$$

taki, że $f(Z, V) = 0$ oraz V' nie ma wektorów izotropowych.

7.4. Załóżmy, że $q(\alpha) = q(\beta) \neq 0$ dla $\alpha, \beta \in V$ i q jest formą kwadratową na V. Pokazać, że istnieje automorfizm $g : V \to V$ zachowujący q taki, że $f(\alpha) = \beta$

7.5. Udowodnić następujące twierdzenie Witta: jeśli V_1, V_2, W są przestrzeniami z formą kwadratową oraz $V_1 \oplus W$ i $V_2 \oplus W$ są izomorficzne, to V_1 i V_2 są izomorficzne.

7.6. Niech V będzie przestrzenią wielomianów stopnia $< n$ nad $\mathbb{R}$. Znaleźć sygnaturę i rząd formy kwadratowej $q(w) = w(a)^2$, dla $a \in \mathbb{R}$.