GAL II*
ZADANIA DOMOWE - IV SERIA

1. W przestrzeni unitarnej V dany jest układ wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ taki, że $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < 0$ dla $i < j$. Udowodnić, że układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest liniowo niezależny.

2. Danych jest 5 wektorów w przestrzeni unitarnej V. Udowodnij, że długość sumy pewnych trzech jest większa lub równa długości sumy pozostałych dwóch.

3. Niech $SO(n) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1. Dla każdego $n > 0$ opisać układem równań podprzestrzeń $\mathrm{lin}(SO(n)) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

4. Endomorfizm φ przestrzeni unitarnej V nazywamy sprzężonym do endomorfizmu ψ jeśli $\langle \varphi(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \psi(\beta) \rangle$ dla każdych $\alpha, \beta \in V$. Ustalmy $r > 0$. Niech C_r^∞ będzie przestrzenią funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^∞ o okresie r z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_0^r fg.$$

Znaleźć endomorfizm sprzężony do $\partial : C_r^\infty \to C_r^\infty$, gdzie $\partial(f) = f'$.

5. Udowodnić, że

(a) Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rzad A jest równy rzędowi macierzy $A^T A$.

(b) Udowodnić, że dla każdego $k \geqslant 0$ zbiór

$$X_k = \{A^T A :\ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ jest macierzą rzędu} \geqslant k\ \}$$

jest wypukły.

Termin zwrotu: 24 V.