GAL II*
ZADANIA DOMOWE - III SERIA

1. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia afinicznego

$$f : \mathbb{C}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (-y + 1, -x + 2y - 1, x + y + z) \in \mathbb{C}^3.$$

2. Liczba rzeczywista k jest ustalona. W trójkącie ABC po boku AB porusza się punkt M, a po boku AC punkt N, które spełniają równość $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} - \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = k$. Wykaż, że wszystkie proste MN przecinają się w jednym punkcie.

3. Wykaż, że dwie rozłączne podprzestrzenie A, B są równoległe (w słabszym sensie) wtedy i tylko wtedy, gdy obie są zawarte w pewnej podprzestrzeni wymiaru $d + 1$, gdzie $d = \max(\dim A, \dim B)$.

4. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dany jest układ dwóch prostych L_1, M_1 i płaszczyzny S_1, wszystkich parami nierównoległych i nieprzecinających się. Ponadto dany jest drugi układ prostych L_2, M_2 i płaszczyzny S_2, podobnie jak wyżej parami nierównoległych i nieprzecinających się. Czy musi istnieć automorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taki, że $f(L_1) = L_2$, $f(M_1) = M_2$ i $f(S_1) = S_2$?

5. W przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ dane są proste

$$L_1 = \{[x : y : x + y] : \ x, y \in \mathbb{R}\}, \qquad L_2 = \{[x : y : x - y] : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje automorfizm rzutowy $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ taki, że $f(L_1) = L_2$, $f([1 : 0 : 0]) = [1 : 2 : 4]$, $f([0 : 1 : 0]) = [1 : 1 : 1]$ oraz $f([0 : 0 : 1]) = [1 : 2 : 1]$. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, podać wzór na $f([x : y : z])$.

Termin zwrotu: 10 V.