GAL II*
ZADANIA DOMOWE - II SERIA

1. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K o wymiarze n i niech $f \in \mathrm{End}(V)$ będzie endomorfimem. Załóżmy, że istnieją wektory własne $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ endomorfizmu takie, że każde n spośród nich jest liniowo niezależne. Czy musi istnieć $c \in K$ takie, że $f(\alpha) = c\alpha$ dla każdego $\alpha \in V$?

2. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ o bazie $\{\beta_{i,j,k}\}$, gdzie $i, j, k \in \{0, 1\}$. Niech $f \in \mathrm{End}(V)$ będzie endomorfizmem takim, że

$$f(\beta_{i,j,k}) = \beta_{1-i,j,k} + \beta_{i,1-j,k} + \beta_{i,j,1-k}.$$

Znaleźć bazę V złożoną z wektorów własnych i podać ich wartości własne.

3. Macierz A ma wyrazy wymierne i jest stopnia n, spełnia równość $A^5 = I$ i liczba 1 nie jest jest wartością własną. Wykaż, ze n jest podzielna przez 4.

4. Znaleźć postać Jordana i bazę Jordana macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Znaleźć wzór na wyrazy macierzy $A^n \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ dla $n > 0$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$