1. Niech $\mathbb{N}_+$ będzie kategorią, której obiektami są liczby całkowite nieujemne a morfizmy są zadane przez

$$\mathbb{N}_+[a,b] = \begin{cases} \{i_a^b\} & \text{jeśli } a \leqslant b, \\ \emptyset & \text{jeśli } a > b. \end{cases}$$

Dla ustalonego ciała K definiujemy funktor $F : \mathbb{N}_+ \to \mathbf{Vect}_K$ przez $F(a) = K^a$,

$$F(i_a^b)(x_1, \ldots, x_a) = (x_1, \ldots, x_a, 0, \ldots, 0).$$

Udowodnić, że przestrzeń $\operatorname{colim}(F)$ jest izomorficzna z przestrzenią wielomianów $K[x]$.

2. Niech $\mathbb{N}_-$ będzie kategorią, której obiektami są liczby całkowite niedodatnie a morfizmy są zdefiniowane jak wyżej. Dla ustalonego ciała K definiujemy funktor $F : \mathbb{N}_- \to \mathbf{Vect}_K$ przez $F(-a) = K^a$,

$$F(i_{-b}^{-a})(x_1, \ldots, x_a, x_{a+1}, \ldots, x_b) = (x_1, \ldots, x_a).$$

Udowodnić, że przestrzeń $\lim(F)$ jest izomorficzna z przestrzenią funkcji $\mathbb{N} \to K$.

3. Znaleźć wszystkie, z dokładnością do relacji sprzężenia, endomorfizmy $f \in \operatorname{End}(\mathbb{F}_2^3)$, które nie posiadają żadnej wartości własnej.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Dane są endomorfizmy $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Czy jeśli $\lambda \in K$ jest wartością własna endomorfizmu $f \circ g$, to λ jest także wartością własną endomorfizmu $g \circ f$? Podać odpowiedź w następujących przypadkach:

(a) V jest skończenie wymiarowa.
(b) V jest nieskończenie wymiarowa i $\lambda \neq 0$.
(c) V jest nieskończenie wymiarowa i $\lambda = 0$.

5. Dla dowolnego podzbioru $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_k\} \subseteq \mathbb{Z}$ i liczby $i \in \{1, \ldots, k\}$ oznaczmy

$$D_i(X) = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}.$$

Niech S_k^n będzie rodziną wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ i niech $V_k := \mathbb{R}[S_k^n]$ będzie przestrzenią o bazie S_k^n. Niech $f_k : V_k \to V_{k-1}$ będzie dane wzorem

$$f_k(X) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} D_i(X).$$

Wykazać, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\ker(f_k) = \operatorname{im}(f_{k+1})$.