

Egzamin: Symulacje stochastyczne

UMK, luty 2010.

1. Zmienna losowa X jest generowana przez następujący algorytm:

```
Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
if  $U < \frac{1}{2}$  then  $X := 2 * U$  else  $X := U$ ;  
Return  $X$ .
```

- (a) Podaj rozkład (gęstość) zmiennej losowej X .
 - (b) Załóżmy, że $X_1, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie takim samym jak X . Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (w sensie zbieżności *prawie na pewno*).
 - (c) Napisz fragment kodu w R, który generuje n niezależnych zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ o rozkładzie takim samym jak X . *Uwaga:* Pamiętaj, że konstrukcje bez pętli `for` są preferowane.
2. Rozważmy następujący fragment kodu w R, realizujący algorytm eliminacji:

```
X <- runif(n,-1,1)  
Y <- runif(n,-1,1)  
R2 <- X^2+Y^2  
R <- sqrt(R2)  
R <- R[R<1]  
N <- length(R)
```

Uwaga: Pamiętaj, że funkcja `runif(n,min,max)` generuje n zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[\min, \max]$.

Liczba n jest dana. Na wyjściu otrzymujemy wektor R zawierający losową liczbę N zmiennych losowych $R[1], \dots, R[N]$ niezależnych, o jednakowym rozkładzie.

- (a) Podaj rozkład prawdopodobieństwa (dystrybuantę) zmiennych losowych $R[i]$ na wyjściu z algorytmu.
 - (b) Podaj wartość oczekiwaną $\mathbb{E}N$.
 - (c) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej N .
3. Niech

$$p = \mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 1),$$

gdzie X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(-1, 1)$. W celu estymowania prawdopodobieństwa p

metodą MC, generujemy $2n$ niezależnych zmiennych losowych $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n$ o rozkładzie $U(-1, 1)$. Estymator $\hat{p}_n$ jest następujący:

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i^2 + Y_i^2 < 1).$$

- (a) Oblicz $\mathbb{E}(\hat{p}_n)$.
 - (b) Oblicz $\text{Var}(\hat{p}_n)$.
 - (c) Podaj w przybliżeniu dla jakiej liczby n będzie spełniony warunek $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| \leq 0.001) \geq 0.95$. Skorzystaj z CTG, przyjmując, że kwantyl rzędu 0.975 rozkładu $N(0, 1)$ jest równy 2.
4. Przestrzenią stanów łańcucha Markowa jest $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}^2$. Na przestrzeni $\mathcal{X}$ określona jest relacja „sąsiedztwa”:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \text{ jeśli } |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1.$$

Graf „sąsiedztwa” jest pokazany na tablicy.

Niech $N(x)$ oznacza liczbę sąsiadów punktu $x \in \mathcal{X}$ (na przykład $N(0, 0) = 4$, $N(1, 1) = 2$, $N(0, 1) = 3$). Prawdopodobieństwa przejścia łańcucha Markowa są dane wzorem:

$$Q(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{N(x)} & \text{jeśli } x \sim y; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(słownie: Q opisuje błądzenie po grafie, w każdym kroku przechodzimy do jednego z sąsiednich punktów z jednakowym prawdopodobieństwem).

- (a) Podać prawdopodobieństwa przejścia w 2 krokach: $Q^2((-1, 1), (1, 1))$ i $Q^2((-1, 1), (0, 0))$.
- (b) Znaleźć rozkład stacjonarny π dla łańcucha o macierzy Q .

Wskazówka: Łatwo znaleźć wektor $\tilde{\pi}$ spełniający warunek odwrotności: $\tilde{\pi}(x)Q(x, y) = \tilde{\pi}(y)Q(y, x)$. Trzeba jeszcze ten wektor $\tilde{\pi}$ unormować.

- (c) Rozważmy łańcuch Metropolisa-Hastingsa o prawdopodobieństwach przejścia

$$P(x, y) = Q(x, y)a(x, y) \text{ dla } x \neq y,$$

gdzie $a(x, y)$ jest prawdopodobieństwem akceptacji ruchu. Podać takie $a(x, y)$, żeby rozkład stacjonarny łańcucha o macierzy P był jednostajny, $U(\mathcal{X})$.