

Egzamin: Symulacje stochastyczne

UMK, luty 2010.

1. Zmienna losowa X jest generowana przez następujący algorytm:

```
Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
 $X := \sqrt{-2 \log U}$ ;  
Return  $X$ .
```

- (a) Podaj rozkład (dystrybuantę lub gęstość) zmiennej losowej X .
- (b) Załóżmy, że $X_1, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie takim samym jak X . Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (w sensie zbieżności *prawie na pewno*).

2. Rozważmy następujący algorytm eliminacji (gdzie p jest ustaloną liczbą, $0 < p < 1$):

```
 $N := 0$   
Repeat  
     $N := N + 1$   
    Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
Until  $U > p$ ;  
Return  $(U, N)$ .
```

- (a) Podaj rozkład zmiennej losowej U na wyjściu z algorytmu.
- (b) Podaj wartość oczekiwaną $\mathbb{E}N$.

3. Łańcuch Markowa na przestrzeni stanów $\mathcal{X} = \{1, 2\}$ jest generowany przez następujący algorytm:

```
Gen  $U \sim U(0, 1)$ ; if  $U < q$  then  $X_0 := 1$  else  $X_0 := 2$ ;  
for  $n := 0$  to  $\infty$  do  $X_{n+1} := KROK(X_n)$   
Return  $(X_0, X_1, \dots)$ ,
```

gdzie $KROK$ jest funkcją wykonującą jeden krok łańcucha:

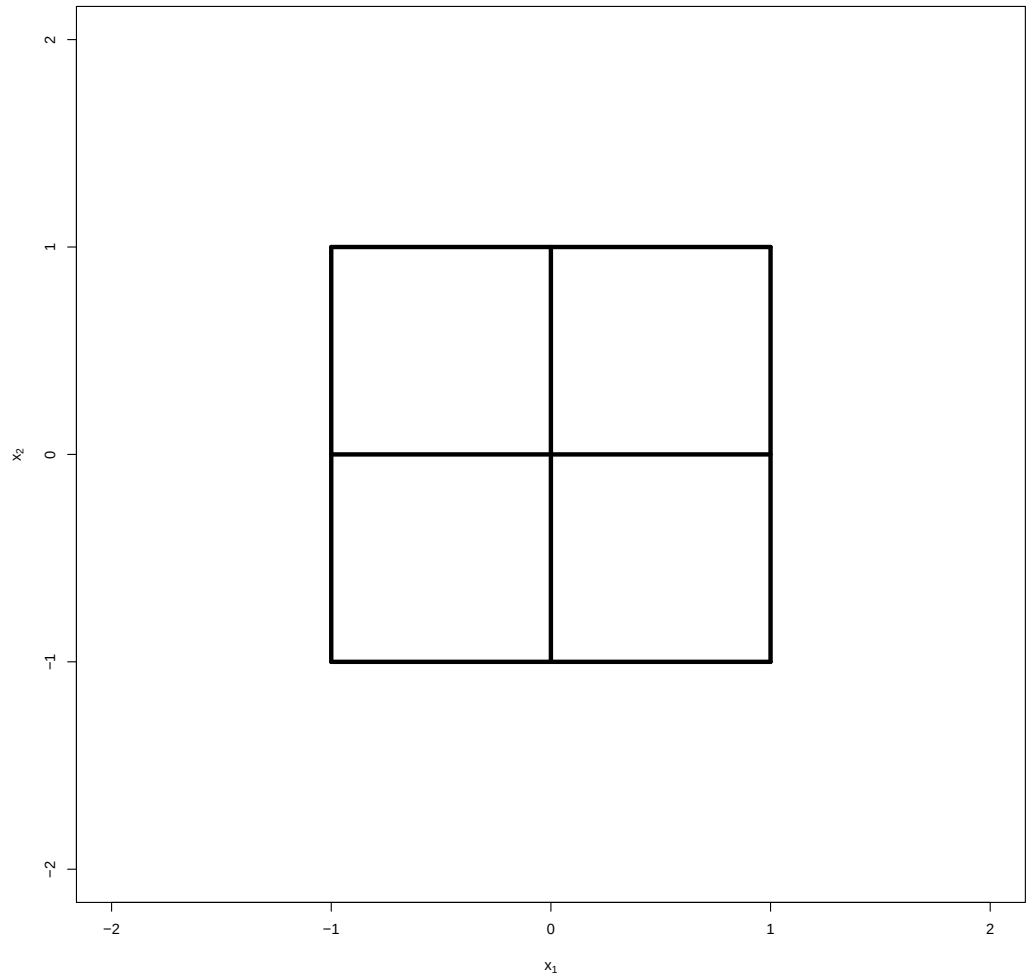
```
function  $KROK(x)$   
if  $x = 1$  then  $Y := 2$  else  
    begin  
        Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
        if  $U < p$  then  $Y := 1$  else  $Y := 2$ ;  
    end  
Return  $(Y)$ .
```

- (a) Niech $q = 1/2$ i $p = 1/2$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$.
- (b) Niech $p = 1/2$. Podaj q takie, że $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 1)$.

4. Przestrzenią stanów łańcucha Markowa jest $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}^2$. Na przestrzeni $\mathcal{X}$ określona jest relacja „sąsiedztwa”:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \text{ jeśli } |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1.$$

Graf „sąsiedztwa” jest pokazany na poniższym obrazku:



Niech $N(x)$ oznacza liczbę sąsiadów punktu $x \in \mathcal{X}$ (na przykład $N(0, 0) = 4$, $N(1, 1) = 2$, $N(0, 1) = 3$). Prawdopodobieństwa przejścia łańcucha Markowa są dane wzorem:

$$Q(x, y) = \frac{1}{N(x)} \text{ dla wszystkich } x, y \in \mathcal{X}$$

(słowami: Q opisuje błądzenie po grafie, w każdym kroku przechodzimy do jednego z sąsiednich punktów z jednakowym prawdopodobieństwem).

- (a) Czy łańcuch o macierzy Q jest nieprzywiedlny?
- (b) Czy łańcuch o macierzy Q jest nieokresowy?
- (c) Znaleźć rozkład stacjonarny π dla łańcucha o macierzy Q .

Wskazówka: Łatwo znaleźć wektor $\tilde{\pi}$ spełniający warunek odwrotności: $\tilde{\pi}(x)Q(x, y) = \tilde{\pi}(y)Q(y, x)$. Trzeba jeszcze ten wektor $\tilde{\pi}$ unormować.

- (d) Rozważmy łańcuch Metropolisa-Hastingsa o prawdopodobieństwach przejścia

$$P(x, y) = Q(x, y)a(x, y) \text{ dla } x \neq y,$$

gdzie $a(x, y)$ jest prawdopodobieństwem akceptacji ruchu. Podać takie $a(x, y)$, żeby rozkład stacjonarny łańcucha o macierzy P był jednostajny, $U(\mathcal{X})$.

5. Niech

$$f(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right) \quad \text{ i } \quad I = \int_0^1 f(u)du.$$

Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i),$$

gdzie $U_1, \dots, U_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$.

- (a) Oblicz $\text{Var} f(U)$ i $\text{Var}(\hat{I}_n)$.

Wskazówka: $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

- (b) Podaj w przybliżeniu dla jakiej liczby n będzie spełniony warunek $\mathbb{P}(|\hat{I}_n - I| \leq 0.001) \geq 0.95$. Skorzystaj z CTG, przyjmując, że kwantyl rzędu 0.975 rozkładu $N(0, 1)$ jest równy 2. Możesz skorzystać z faktu, że $\text{Var} f(U) \approx 0.09471527 \approx 0.095$.

- (c) Oblicz $\text{Cov}(f(U), f(1 - U))$.

Wskazówka: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

- (d) Napisz estymator całki I wykorzystujący metodę zmiennych antyteycznych.