Egzamin: Symulacje stochastyczne

MIMUW, wrzesień 2006.

1. Podaj rozkład zmiennej losowej N na wyjściu z następującego algorytmu (p jest stałym parametrem, $0 < p < 1$).

   $N := -1$
   `Repeat`
   $N := N + 1$
   `Gen` $U \sim U(0,1)$`;`
   `Until` $U < p$`;`
   `Return(`N`).`

2. Zaproponuj generator zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } -1 \leq x < 0; \\ -x+1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

3. Podaj gęstość (dwuwymiarowego) rozkładu zmiennej losowej (X, Y) na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $R \sim U(0,1)$`;`
   `Gen` $\Phi \sim U(0,2\pi)$`;`
   $X := R\cos\Phi$`;` $Y := R\sin\Phi$`;`
   `return(`X, Y`).`

4. Rozważmy łańcuch Markowa X_n na przestrzeni $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, generowany zgodnie z algorytmem Metropolisa. Niech $X_0 := 0$ będzie stanem początkowym; reguła przejścia jest następująca:

   `jeśli` $X_n = x$ `to`

   `niech` $y := \min(x+1, n)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$ `lub` $y := \max(x-1, 0)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$`;`

   `jeśli` $y \leq x$ `to przyjmij` $X_{n+1} := y$`;`

   `jeśli` $y > x$ `to z prawdopodobieństwem` q `przyjmij` $X_{n+1} := y$ `a z prawdopodobieństwem` $1-q$ `przyjmij` $X_{n+1} := x$

(q jest tutaj stałym parametrem algorytmu, $0 < q < 1$).

Podaj graniczny rozkład prawdopodobieństwa

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x).$$

5. Niech

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{i} \quad I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

Podaj $\mathrm{Var}(\hat{I}_n)$.