

Egzamin: Symulacje stochastyczne

MIMUW, czerwiec 2011.

1. Podaj rozkład zmiennej losowej Y na wyjściu następującego algorytmu

```
Gen  $X \sim U(0, 1)$ ;  
Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
if  $X < U$  then  $Y := X$  else  $Y := 1 - X$ ;  
return  $Y$ 
```

2. Niech

$$\theta = \int_a^b f(x) dx.$$

Rozważmy następujący estymator całki θ (prosta metoda MC):

$$\hat{\theta}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i),$$

gdzie $X_1, \dots, X_i, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(a, b)$. O funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wiadomo tyle, że $|f(x)| \leq M$, gdzie M jest znaną stałą.

Podaj rozmiar n wylosowanej próbki dostateczny, aby zapewnić nierówność (w przybliżeniu)

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > 0.01) \leq 0.05.$$

Skorzystaj z asymptotycznego przedziału ufności opartego na Centralnym Twierdzeniu Granicznym i z oszacowania wariancji $\text{Var} f(X_1) \leq \mathbb{E} f(X_1)^2$. Kwintyl rzędu $1 - \alpha/2 = 0.975$ rozkładu normalnego $N(0, 1)$ jest w przybliżeniu równy 2.

3. Rozważmy następujący kod w R:

```
n <- 100  
X <- rexp(n, rate=2)  
Y <- X[X>1] - 1  
N <- length(Y)
```

Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej N po wykonaniu tego kodu i rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych $Y[1], \dots, Y[N]$ pod warunkiem, że $N > 0$.

4. Na przestrzeni stanów $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, 10\}$ rozważmy następującą symetryczną macierz stochastyczną $Q = Q(x, y)_{x, y \in \mathcal{X}}$:

$$Q(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{jeśli } |x - y| = 1 \text{ lub } x = y = 1 \text{ lub } x = y = 10; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Rozważmy algorytm Metropolis'a. Niech $X_0 := 1$; przejście z X_n do X_{n+1} jest wykonane zgodnie z następującą regułą:

```

Gen  $Y \sim Q(X_n, \cdot)$ ;
begin
  if  $Y \leq X_n$  then  $X_{n+1} := Y$  else
    begin
      Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;
      if  $U < 1/2$  then  $X_{n+1} := Y$  else  $X_{n+1} := X_n$ ;
    end
  end

```

Podaj rozkład prawdopodobieństwa π , do którego zbiega łańcuch X_n .

5. Uzupełnij następujący algorytm eliminacji odpowiednim warunkiem „**until**” w taki sposób, żeby zmienna losowa Y na wyjściu miała rozkład $\text{Beta}(3, 2)$:

repeat

```

  Gen  $X \sim U(0, 1)$ ;
   $Y := \sqrt[3]{X}$ ;
  Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;

```

until [... ..];

return Y

Gęstość rozkładu $\text{Beta}(3, 2)$ jest dana wzorem

$$f(y) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} y^2(1-y) \quad \text{dla } 0 \leq y \leq 1.$$

6. Niech $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ będzie grafem nieskierowanym, spójnym. Błądzenie losowe po grafie polega na tym, że będąc w wierzchołku $s \in \mathcal{S}$ wybieramy losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) jeden z wierzchołków połączonych z s krawędzią i do niego przechodzimy. Formalnie, jest to łańcuch Markowa z prawdopodobieństwami przejścia

$$P(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{\deg s} & \text{jeśli } \{s, t\} \in \mathcal{E}; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jaki jest rozkład stacjonarny takiego łańcucha?