

Egzamin: Symulacje stochastyczne

MIMUW, czerwiec 2006.

1. Podaj rozkład zmiennej losowej X na wyjściu z następującego algorytmu

```
Gen  $V \sim U(0, \pi/2)$ ;  
 $X := \sin^2 V$ ;  
return( $X$ ).
```

2. Skonstruować generator zmiennej losowej o dystrybucji

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

3. Podaj rozkład zmiennej losowej Y na wyjściu z następującego algorytmu

```
Gen  $X \sim U(0, 1)$ ;  
Gen  $U \sim U(0, 1)$ ;  
if  $U \leq 1 - X$  then  $Y := X$  else  $Y := X - 1$ ;  
return( $Y$ ).
```

4. Niech π będzie rozkładem dwumianowym na przestrzeni $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$:

$$\pi(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}.$$

Rozważmy algorytm Metropolisa:

- niech $X_0 := 0$;
- jeśli $X_n = x$ to
 - niech $y := \min(x + 1, n)$ z prawdopodobieństwem $1/2$ lub $y := \max(x - 1, 0)$ z prawdopodobieństwem $1/2$;
 - przyjmij $X_{n+1} := y$ z prawdopodobieństwem $a(x, y)$ lub $X_{n+1} := x$ z prawdopodobieństwem $1 - a(x, y)$.

Podaj prawdopodobieństwa akceptacji $a(x, x + 1)$ i $a(x, x - 1)$ tak, żeby łańcuch był zbieżny do rozkładu π .

5. Rozważmy ciąg $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ zmiennych losowych (proces autoregresji 1-go rzędu) generowany rekurencyjnie zgodnie ze wzorem

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1},$$

gdzie α jest liczbą, zaś $W_1, \dots, W_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.

Podaj rozkład prawdopodobieństwa, z którego należy wygenerować X_0 , żeby otrzymany ciąg był stacjonarny (tzn. żeby wszystkie zmienne X_i miały ten sam rozkład). Dla jakich liczb α jest to możliwe?

6. Niech

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{ i } \quad I = \int_0^1 f(x)dx.$$

Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i),$$

gdzie $X_1, \dots, X_i, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$.

Podaj $\text{Var}(\hat{I}_n)$.

Rozważmy estymator (metoda zmiennych antytetycznych):

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} [f(X_i) + f(1 - X_i)],$$

gdzie $X_1, \dots, X_i, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$.

Podaj $\text{Var}(\tilde{I}_n)$.