Egzamin: Symulacje stochastyczne

MIMUW, czerwiec 2006.

1. Podaj rozkład zmiennej losowej X na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $V \sim U(0, \pi/2)$;
   $X := \sin^2 V$;
   `return(`X`).`

2. Skonstruować generator zmiennej losowej o dystrybuancie

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

3. Podaj rozkład zmiennej losowej Y na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $X \sim U(0, 1)$;
   `Gen` $U \sim U(0, 1)$;
   `if` $U \le 1 - X$ `then` $Y := X$ `else` $Y := X - 1$;
   `return(`Y`).`

4. Niech π będzie rozkładem dwumianowym na przestrzeni $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$:

$$\pi(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}.$$

   Rozważmy algorytm Metropolisa:

   - `niech` $X_0 := 0$;
   - `jeśli` $X_n = x$ `to`

     `niech` $y := \min(x+1, n)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$ `lub` $y := \max(x - 1, 0)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$;

     `przyjmij` $X_{n+1} := y$ `z prawdopodobieństwem` $a(x, y)$ `lub` $X_{n+1} := x$ `z prawdopodobieństwem` $1 - a(x, y)$.

   Podaj prawdopodobieństwa akceptacji $a(x, x+1)$ i $a(x, x-1)$ tak, żeby łańcuch był zbieżny do rozkładu π.

5. Rozważmy ciąg $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ zmiennych losowych (proces autoregresji 1-go rzędu) generowany rekurencyjnie zgodnie ze wzorem

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1},$$

gdzie α jest liczbą, zaś $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

Podaj rozkład prawdopodobieństwa, z którego należy wygenerować X_0, żeby otrzymany ciąg był stacjonarny (tzn. żeby wszystkie zmienne X_i miały ten sam rozkład). Dla jakich liczb α jest to możliwe?

6. Niech

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{i} \quad I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

Podaj $\mathrm{Var}(\hat{I}_n)$.

Rozważmy estymator (metoda zmiennych antytetycznych):

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n/2} \left[f(X_i) + f(1 - X_i)\right],$$

gdzie $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

Podaj $\mathrm{Var}(\tilde{I}_n)$.