Egzamin: Symulacje stochastyczne i metody Monte Carlo

MiI UMK, styczeń-luty 2006.

1. Skonstruować generator zmiennej losowej o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{dla } -1 < x < 0; \\ 1-x & \text{dla } 0 \le x < 1; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

   Napisać funkcję w R i wytestować jej poprawność.

2. Skonstruować generator zmiennej losowej o dystrybuancie

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

   Napisać funkcję w R i wytestować jej poprawność. Obliczyć $\mathbb{E}|X|$.

3. Jaki jest rozkład zmiennej losowej Y na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $X \sim U(0,1)$;
   `Gen` $U \sim U(0,1)$;
   `if` $U \le 1 - X$ `then` $Y \leftarrow X$ `else` $Y \leftarrow X - 1$;
   `return(`Y`)`

   Napisać funkcję w R i sprawdzić swoje rozumowanie doświadczalnie.

4. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym, $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$, $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = 1$ i $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho$. Zaprojektować obliczanie metodą MC wielkości:

$$I = I(\rho) = \mathbb{E}\max(X,Y).$$

   Przeprowadzić obliczenia dla $\rho = -0.5$, $\rho = 0$, $\rho = 0.5$ z dokładnością do 0.0001. Obliczyć teoretycznie „graniczne wartości” $I(-1)$, $I(1)$ i (ambitniejsze zadanie) $I(0)$. Upewnić się, że dla $\rho \to -0.5$, $\rho \to 0.5$ (i, ewentualnie, dla $\rho = 0$) algorytm oblicza to, co trzeba.

5. (*Schemat urnowy Polya*) W urnie znajduje się początkowo b kul białych i c kul czarnych ($b + c = m$). Losujemy 1 kulę. Po wylosowaniu zwracamy kulę do urny i dorzucamy do urny jeszcze r kul tego koloru, co wylosowana kula (tak, że po pierwszym losowaniu w urnie jest $m + r$ kul). Powtarzamy te czynności wielokrotnie: losujemy 1 kulę, zwracamy ją do urny dodając jeszcze r nowych kul ostatnio wylosowanego koloru. Po n-tym losowaniu w urnie jest więc $m + nr$ kul.

   Zbadajmy własności ciągu takich losowań. Niech

$$X_n = \mathbb{I}(\text{w } n\text{-tym losowaniu pojawiła się kula biała}).$$

   Napisać program symulujący opisany powyżej ciąg losowań. Przeprowadzić serię doświadczeń dla $b = c = r = 1$. Dla każdego doświadczenia zrobić wykres frakcji wylosowanych kul białych $Y_n = S_n/n$, gdzie

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   jako funkcji liczby losowań n. Sformułować na podstawie doświadczeń symulacyjnych hipotezę na temat rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

$$Y_\infty = \lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}.$$

   Powtórzyć doświadczenia dla zestawów $b = c = 5$, $r = 1$ oraz $b = c = 1$, $r = 5$. Narysować histogramy przybliżające gęstość Y_∞.