Egzamin: Symulacje stochastyczne i metody Monte Carlo

WMiI UMK, czerwiec 2006.

1. Podać rozkład zmiennej losowej X na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $V \sim U(0, \pi/2)$;
   $X := \sin^2 V$;
   `return(`X`)`.

2. Skonstruować generator zmiennej losowej o dystrybuancie

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

3. Podać rozkład zmiennej losowej Y na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $X \sim U(0, 1)$;
   `Gen` $U \sim U(0, 1)$;
   `if` $U \leq 1 - X$ `then` $Y := X$ `else` $Y := X - 1$;
   `return(`Y`)`.

4. Niech π będzie rozkładem dwumianowym na przestrzeni $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$:

$$\pi(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}.$$

   Rozważmy algorytm Metropolisa:

   - `niech` $X_0 := 0$;
   - `jeśli` $X_n = x$ `to`

     `niech` $y := \min(x+1, n)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$ `lub` $y := \max(x - 1, 0)$ `z prawdopodobieństwem` $1/2$;

     `przyjmij` $X_{n+1} := y$ `z prawdopodobieństwem` $a(x, y)$ `lub` $X_{n+1} := x$ `z prawdopodobieństwem` $1 - a(x, y)$.

   Podaj prawdopodobieństwa akceptacji $a(x, x+1)$ i $a(x, x-1)$ tak, żeby łańcuch był zbieżny do rozkładu π.

5. Rozważmy następujący algorytm (próbnik Gibbsa) generujący łańcuch Markowa $X(0), X(1), \ldots, X(n), \ldots$ na przestrzeni $\mathcal{X} = \{0,1\}^d$:

   - `niech` $X(0) := (1, \ldots, 1)$;
   - `jeśli` $X(n) = x = (x_1, \ldots, x_d)$ `to`

     `wybierz losowo` $i \in \{1, \ldots, d\}$ `(każde` i `z jednakowym prawdopodobieństwem` $1/d$`);`

     `rzuć monetą i przyjmij:`

     $y := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_d)$ `jeśli otrzymasz ,,O'';`

     $y := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_d)$ `jeśli otrzymasz ,,R'';`

     `niech` $X(n+1) := y$.

   Do jakiego rozkładu π ten algorytm jest zbieżny?

   Znajdź $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S(X(k))$ (p.n.),

   gdzie $S(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i$ dla $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

6. Niech

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{i} \quad I = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x.$$

   Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

   gdzie $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

   Podaj $\mathrm{Var}(\hat{I}_n)$.