Egzamin: Symulacje stochastyczne i metody Monte Carlo

WMiI UMK, styczeń 2008.

1. Obliczyć rozkład zmiennej losowej X na wyjściu z następującego algorytmu

   `Gen` $U_1 \sim U(0,1)$; `Gen` $U_2 \sim U(0,1)$;
   `if` $U_1 < \frac{1}{3}$ `then` $X := -\ln U_2$ `else` $X := -\frac{1}{2}\ln U_2$;
   `return(`X`)`.

   Można opisać ten rozkład podając gęstość lub dystrybuantę.

2. Skonstruować generator zmiennej losowej o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{9}{(x+3)^2} & \text{dla } x \geq 0; \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

3. Podać dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej S na wyjściu z następującego algorytmu

   `Repeat`
   `Gen` $X \sim U(0,1)$; `Gen` $Y \sim U(0,1)$;
   $S := X + Y$;
   `until` $S < 1$;
   `return(`S`)`.

4. Niech

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{i} \quad I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

   Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

   gdzie $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Podaj n dostatecznie duże, aby można było twierdzić, że

$$\mathbb{P}(|\hat{I}_n - I| \leq 0.001) \geq 0.95.$$

Uwaga: Należy posłużyć się przybliżeniem rozkładem normalnym, czyli Centralnym Twierdzeniem Granicznym. Ponieważ $\mathrm{Var} f(X_1)$ *jest trudne do obliczenia, można wykorzystać oczywiste oszacowanie* $\mathrm{Var} f(X_1) \leq 1$. *Przyjąć, że kwantyl rzędu 0.975 rozkładu* $\mathrm{N}(0,1)$ *jest równy 2.*

5. Niech

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{i} \quad I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Rozważmy następujący estymator całki I (prosta metoda MC):

$$\hat{I} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} f(X_i),$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Podaj $\mathrm{Var}(\hat{I})$.

(b) Rozważmy estymator (metoda zmiennych antytetycznych):

$$\tilde{I} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{50} \left[f(X_i) + f(1 - X_i)\right],$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Podaj $\mathrm{Var}(\tilde{I})$.

Wskazówka: Mogą się przydać wzory $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ *oraz* $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.