Topologia, Kolokwium nr 1
25 listopada 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia i termin zajęć.
- numer rozwiązywanego zadania

Zadanie 1

Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ i } 0 \leqslant y < 1)\}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych wymiernych. Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru A

(1) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową d_k
(2) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka d_r

Zadanie 2

Niech $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$ z topologią podprzestrzeni prostej euklidesowej. Podać przykład trzech niehomeomorficznych gęstych właściwych podprzestrzeni iloczynu kartezjańskiego $X \times X$.

Zadanie 3

Niech $f(x,y) = (x^2, 1)$. Znaleźć zbiór punktów ciągłości f jako przekształcenia $(\mathbb{R}^2, d_r)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$, gdzie d_r jest metryką rzeka.

Zadanie 4

Udowodnić, że ośrodkowa przestrzeń metryczna X nie zawiera nieprzeliczalnej podprzestrzeni D spełniającej następujacy warunek:

- dla każdego $x \in D$ istnieje otwarty podzbiór U_x przestrzeni X taki, że $U_x \cap D = \{x\}$.

Metryki kolejowa d_k oraz rzeka d_r są określone odpowiednio wzorami

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b) & \text{jeżeli } a,\ b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b) & \text{jeżeli } p(a) = p(b) \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)) & \text{jeżeli } p(a) \neq p(b), \end{cases}$$

gdzie $p(x,y) = (x,0)$, d_e oznacza metrykę euklidesową i $\mathbf{0} = (0,0)$.