Topologia, Kolokwium nr 2
12 stycznia 2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia i termin zajęć.
- numer rozwiązywanego zadania

Zadanie 1

Dla punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$ niech $I(x,y)$ oznacza odcinek domknięty o końcach x, y. Niech $a = (0,0)$, $b = (0,1), b_n = (\frac{1}{n}, 1), c_n = (n,1)$ będą punktami $\mathbb{R}^2$. Dane sa następujące podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$$Y_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a, b_n) \cup \{(0, -\frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\}, \quad Y_2 = Y_1 \cup I(a, b),$$

$$Y_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a, b_n) \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\}, \quad Y_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a, c_n) \cup \{(0, -\frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\}$$

(a) Zbadać zwartość i zupełność tych przestrzeni.
(b) Znaleźć te wszystkie $i, j \neq i$, że przestrzenie Y_i oraz Y_j są homeomorficzne.

Zadanie 2

Niech $X \subset \mathbb{R}^2$ będzie sumą przeliczalnie wielu parabol i niech $X + (a_1, a_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \in X\}$ dla $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pokazać, że:

(a) Istnieje $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $(0,0)$ nie należy do zbioru $X + (a_1, a_2)$.
(b) Istnieje $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $(X + (a_1, a_2)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Parabola to wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3

Pokazać, że zwarty podzbiór przestrzeni funkcji ciągłych $C([0,1])$ z metryką $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1])} |f(x) - g(x)|$ nie zawiera żadnej kuli.

Zadanie 4

(a) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią Hausdorffa oraz K jej zwartą podprzestrzenią. Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ zawierającego K, zbiór $X \setminus U$ jest zwarty. Pokazać, że $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą.
(b) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną $K \subset X$ jej zupełną w metryce d podprzestrzenią. Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ zawierającego K, przestrzeń $X \setminus U$ jest zupełna w metryce d. Pokazać, że (X, d) jest przestrzenią zupełną.