Kolokwium z Topologii I 07.12.2010

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ 25 PUNKTÓW ZA KAŻDE ZADANIE

1. Niech $C[0,1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych na odcinku euklidesowym $[0,1]$ o wartościach w prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ z metryką „supremum”:

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{\, |f(x) - g(x)| \ : \ x \in [0,1]\}.$$

Znaleźć wnętrze i domknięcie zbioru $A = \{f \in C[0,1] : \ f([0,\frac{1}{2}]) \subset (1,2]\}$ w przestrzeni $(C[0,1], d_{\sup})$.

2. Niech d_k oznacza metrykę „kolejową”, a d_r oznacza metrykę „rzeka” na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Znaleźć zbiór punktów ciągłości przekształcenia $f : (\mathbb{R}^2, d_k) \to (\mathbb{R}^2, d_r)$ określonego formułą

$$f(x,y) = (x, x+y).$$

3. Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami topologicznymi, a $f : X \to \mathbb{R}^2$ i $g : Y \to \mathbb{R}^2$ przekształceniami ciągłymi o wartościach w płaszczyźnie euklidesowej. Symbolem $I(a,b)$ oznaczamy odcinek łączący punkty a, b przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, wraz z końcami. Udowodnić, że następujący zbiór

$$A = \bigcup_{x \in X, y \in Y} I((f(x),0),(g(y),1))$$

jest zwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$.

4. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, a $\mathbb{R}$ prostą euklidesową. Dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, przez $N(f)$ oznaczamy zbiór punktów iloczynu kartezjańskiego $X \times \mathbb{R}$ leżących powyżej wykresu f, tzn.

$$N(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \ t > f(x)\}.$$

(A) Podać przykład nieciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $N(f)$ jest otwartym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$.

(B) Pokazać, że jeśli przestrzeń (X,d) jest zwarta, to

($\star$) każda funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, ze $N(f)$ jest otwarte w iloczynie $X \times \mathbb{R}$ jest ograniczona z góry.

(C) Pokazać, że jeśli dla przestrzeni (X,d) spełniony jest warunek ($\star$), to (X,d) jest przestrzenią zwartą.