Kolokwium z topologii, Potok I, 03.12.2009

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ. KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

Metryki d_k i d_r w $\mathbb{R}^2$ określone są formułami, gdzie $\mathbf{0} = (0,0)$, $p(x,y) = (x,0)$, oraz d_e oznacza metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$:

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } a,b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej,} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}), & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

Dla punktów $a, b \in R^2$ niech $I(a,b)$ oznacza odcinek domknięty o końcach a i b.

Zad.1. Dla punktów $x, y \in R^2$ niech $I(x,y)$ oznacza odcinek domknięty o końcach x i y. Niech X będzie następującym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I((0,\frac{1}{n}),(\frac{1}{n},\frac{1}{n})) \cup \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(-1,\frac{1}{n})\}$$

Niech (X, d_e) (odpowiednio, (X, d_k) lub (X, d_r)) oznaczają przestrzeń X z metryką d_e (odpowiednio, d_k lub d_r) obciętą do X.

(a) Zbadać zwartość, zupełność i ośrodkowość przestrzeni metrycznych (X, d_e), (X, d_k) i (X, d_r).

(b) Czy wśród tych trzech przestrzeni są przestrzenie homeomorficzne?

Zad.2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone formułą

$$f(x,y) = (x+y, y+2).$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_r)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

Zad.3. Dla $A \subset (-\infty, -1]$ rozpatrzmy następujący podzbiór płaszczyzny

$$X(A) = \bigcup \{I((0,0),(x,e^x)) : x \in A\}.$$

Pokazać, że podprzestrzeń $X(A)$ płaszczyzny z metryką euklidesową jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest zwarty.

Zad.4. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej X do przestrzeni metrycznej Y taką, że obraz każdego zbioru domkniętego w X jest domkniety w Y. Pokazać, że jeśli dla każdego $y \in Y$ zbiór $f^{-1}(y)$ jest zwarty, to dla każdego zwartego zbioru $F \subset Y$ przeciwobraz $f^{-1}(F)$ jest zbiorem zwartym.