KOLOKWIUM TOPOLOGIA 1, 6.11.2003
POTOK II

1. Niech $A \subset R^2$, $B \subset R^2$ będą następującymi podzbiorami: $A = \{(x,y) \in R^2 : d_k((x,y),(0,0)) \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 : d_k((x,y),(1,1)) \leq 1\}$, gdzie d_k jest metryką kolejową na płaszczyźnie. Czy A i B są spójne?

2. Zbadać spójność $\{(x,y) \in R^2 : x \in Z \;\; lub \;\; y \in Z\}$.

3. Niech $A \subset X$ będzie dowolnym zaś $B \subset X$ spójnym podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Pokazać, że jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ i $(X \setminus A) \cap B \neq \emptyset$, to $\partial A \cap B \neq \emptyset$.

4. Niech X będzie spójną przestrzenią metryczną. Pokazać, że jeżeli X nie jest przestrzenią jedno-punktową, to X ma co najmniej continuum punktów.

5. Zbadać spójność R z topologią strzałka.

6. Wykazać, że przestrzeń $X = R^2 \setminus A$ powstała z usunięcia z płaszczyzny euklidesowej podzbioru przeliczalnego A jest spójna.

7. Wykazać, że przestrzeń $C(I,R)$ funkcji ciągłych na odcinku jest łukowo spójna.

8. Niech $f : X \to R$ będzie funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej spójnej X w prostą euklidesową. Niech $W(f) = \{(x, f(x)); x \in X\}$ będzie wykresem funkcji f. Wykazać, że podprzestrzeń $(X \times R) \setminus W(f)$ iloczynu $X \times R$ jest niespójna i ma dokładnie dwie składowe. *Składową przestrzeni X nazywamy jej dowolną spójną podprzestrzeń, maksymalną ze względu na własność spójności.*

KOLOKWIUM TOPOLOGIA 1, 6.11.2003
POTOK II

Nazwisko:
Imię:

1. Niech $d : R^2 \times R^2 \to R$ będzie zadana wzorem $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Udowodnić, że d jest metryką na płaszczyźnie. Naszkicować kulę otwartą o środku w $(1, 1)$ i promieniu 1.

2. Niech d_k oznacza metrykę kolejową na płaszczyźnie. Zbadać, czy metryka d_k jest równoważna metryce d z zadania poprzedniego.

3. Niech d będzie metryką na X taką, że dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi nierówność $d(x, y) \leq max\{d(x, z), d(y, z)\}$. Wykazać, że jeśli $y \in B(x, r)$ to $B(y, r) \subset B(x, r)$.

4. Znaleźć punkty ciągłości funkcji $f : R \to R^2$ określonej wzorem $f(x) = (x, x^2)$, gdy na R rozważamy metrykę euklidesową a na R^2 metrykę "rzeka".

5. Niech $x_0 \in X$ będzie wyróżnionym punktem. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną podzbiorów X zdefiniowaną w następujący sposób: $U \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy gdy $U = \emptyset$ lub $x_0 \in U$. Sprawdzić, że $\mathcal{T}$ zadaje topologię na X. Czy para $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa ? Czy każdy podzbiór jednopunktowy w X jest domknięty w $(X, \mathcal{T})$?

6.Niech $A = \{(x, y) \in R^2; 1 \leq x < 2, \quad 1 \leq y < 2\}$. Znaleźć wnętrze i domknięcie A na płaszczyźnie z metryką "rzeka".

7. Niech $A = [0, 1] \cap Q$. Niech $B = A \times (0, 1)$. Niech $X = B \cup ([0, 1] \times \{0\})$ będzie podprzestrzenią R^2 z metryką euklidesową. Znaleźć domknięcie B w X.

8. Pokazać, że jeśli Y jest domkniętym podzbiorem X a A jest domkniętym podzbiorem Y rozważanego z topologią podprzestrzeni przestrzeni X, to A jest domkniętym podzbiorem X.

9. Niech $T = \{1/n; n \in N\}$, $T_0 = \{0\} \cup T$. Czy podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $T \times T$ i $T_0 \times T$ są homeomorficzne ?

10. W oznaczeniach zadania poprzedniego: czy podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $T_0 \times T$ i $T_0 \times T_0$ są homeomorficzne ?

KOLOKWIUM - TOPOLOGIA 05.11.2004

KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ

Metryki d_k i d_r w $\mathbb{R}^2$ określone są formułami, gdzie $\mathbf{0} = (0,0)$, $p(x,y) = (x,0)$, oraz d_e oznacza metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$:

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } a, b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej,} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}), & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

ZADANIA

---

1. Niech

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 < y < \frac{1}{x}\}.$$

Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru A w każdej z przestrzeni metrycznych $(\mathbb{R}^2, d_k)$ i $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone formułą

$$f(x,y) = (x+y, y).$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_r)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

3. W przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$, niech

$$A = \{f \in C[0,1] : \text{ istnieje } t \in [0, \frac{1}{2}],\ \text{takie że } f(t) = 0\},$$

$$B = \{f \in C[0,1] : \text{ istnieje } t \in [0, \frac{1}{2}),\ \text{takie że } f(t) = 0\}.$$

Znaleźć domknięcie i wnętrze każdego ze zbiorów A i B w przestrzeni metrycznej $C[0,1]$ z metryką "supremum".

4. Niech $t_n \in \mathbb{R}$, $a_n = (t_n, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$ i niech $I(a_n, a_{n+1})$ będzie odcinkiem na płaszczyźnie euklidesowej łączącym punkty a_n i a_{n+1}. Określmy

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a_n, a_{n+1}).$$

Wykazać, że $(t,0) \in \overline{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy przedział $(t-\epsilon, t+\epsilon)$ przecina nieskończenie wiele przedziałów $[t_n, t_{n+1}]$.

KOLOKWIUM TOPOLOGIA I, 11.12.2003
POTOK II, Grupa A

Nazwisko:
Imię:

1. (15) Udowodnić, że podzbiór $[1,2] \times [1,2]$ płaszczyzny z metryką rzeka jest homeomorficzny z produktem przestrzeni metrycznych X_1 i X_2, gdzie $X_1 = [1,2]$ z metryką dyskretną a $X_2 = [1,2]$ z metryką euklidesową.

2. (15) Niech $f, g : X \to R$ będą funkcjami ciągłymi rzeczywistymi na przestrzeni spójnej X takimi, że $f(x) < g(x)$ dla każdego $x \in X$. Pokazać, że zbiór $\{(x,t)| \ f(x) < t \leq g(x)\}$ jest spójną podprzestrzenią produktu $X \times R$.

3. (20) Niech $X = \bigcup_{n \in N} I_n$ będzie podzbiorem płaszczyzny euklidesowej, gdzie I_n jest odcinkiem domkniętym łączącym punkt $(0,0)$ z punktem $(1/n, 1)$. Niech $X_0 = X \cup \{(0,1)\}$. Pokazać, że X_0 jest przestrzenią spójną. Czy przestrzenie X i X_0 są homeomorficzne ?

4. (15) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y). Pokazać, że jeśli wykres $W(f) = \{(x,y) \in X \times Y | \ y = f(x)\}$ przekształcenia f jest zwartym podzbiorem $X \times Y$, to f jest ciągłe.

5. (20) Niech $T_0 = \{0\} \cup \{1/n | \ n \in N\}$. Czy podzbiór płaszczyzny euklidesowej $T_0 \times T_0$ jest homeomorficzny z $T_0 \times T_0 \setminus \{(1,0)\}$? Czy $T_0 \times T_0 \setminus \{(0,0)\}$ jest homeomorficzny z $T_0 \times Z$, gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych z topologią podprzestrzeni prostej euklidesowej ?

6. (15) Niech $S^1 = \{(x,y) \in R^2 | \ x^2 + y^2 = 1\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej R^2. Niech I_a oznacza odcinek domknięty łączący $a \in R^2$ z punktem $(0,0)$. Niech A będzie dowolnym podzbiorem S^1 a $CA = \bigcup_{a \in A} I_a$. Pokazać, że CA jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy A jest zwarty. Czy prawdą jest, że CA jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy A jest spójny ?

KOLOKWIUM TOPOLOGIA I, 11.12.2003
POTOK II, Grupa B

Nazwisko:
Imię:

1. (15) Niech $A = B((0,0),2) \setminus B((0,0),1)$ będzie podzbiorem płaszczyzny z metryką kolejową powstałym poprzez usunięcie dysku jednostkowego z dysku otwartego o promieniu 2 i środku w $(0,0)$. Udowodnić, że podzbiór A jest homeomorficzny z produktem przestrzeni metrycznych X_1 i X_2, gdzie X_1 jest okręgiem jednostkowym z metryką dyskretną a X_2 przedziałem $[1,2)$ z metryką euklidesową.

2. (15) Niech $f, g : X \to R$ będą funkcjami ciągłymi rzeczywistymi na przestrzeni spójnej X takimi, że $f(x) < g(x)$ dla każdego $x \in X$. Pokazać, że zbiór $\{(x,t)|\ f(x) \leq t < g(x)\}$ jest spójną podprzestrzenią produktu $X \times R$.

3. (20) Niech $X = \bigcup_{n \in N} I_n$ będzie podzbiorem płaszczyzny euklidesowej, gdzie I_n jest odcinkiem domkniętym łączącym punkty $(0,0)$ i $(-1/n, -1)$. Niech $X_0 = X \cup \{(0,-1)\}$. Pokazać, że X_0 jest przestrzenią spójną. Czy przestrzenie X i X_0 są homeomorficzne ?

4. (15) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y). Pokazać, że jeśli wykres $W(f) = \{(x,y) \in X \times Y|\ y = f(x)\}$ przekształcenia f jest zwartym podzbiorem $X \times Y$, to f jest ciągłe.

5. (20) Niech $T_0 = \{0\} \cup \{1/n|\ n \in N\}$. Czy podzbiór płaszczyzny euklidesowej $T_0 \times T_0$ jest homeomorficzny z $T_0 \times T_0 \setminus \{(0,1)\}$? Czy $T_0 \times T_0 \setminus \{(0,0)\}$ jest homeomorficzny z $Z \times T_0$, gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych z topologią podprzestrzeni prostej euklidesowej ?

6. (15) Niech $S^1 = \{(x,y) \in R^2|\ x^2 + y^2 = 1\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej R^2. Niech I_a oznacza odcinek domknięty łączący $a \in R^2$ z punktem $(0,0)$. Niech A będzie dowolnym podzbiorem S^1 a $CA = \bigcup_{a \in A} I_a$. Pokazać, że CA jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy A jest zwarty. Czy prawdą jest, że CA jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy A jest spójny ?

Egzamin z topologii I

marzec 2003

1 Niech

$$X = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\} \cup \mathbb{N}$$

$$Y = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}} x = -\frac{1}{n}\}$$

gdzie $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Proszę zbadać, czy X i Y są homeomorficzne. Odpowiedź uzasadnić.

2 Niech $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$, gdzie X_i są zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni metrycznej X, $\operatorname{diam} X_i \to 0$ przy $i \to 0$, $X_0 = \{x_0\}$ i $X_i \cap X_j = \{x_0\}$ dla $i \neq j$. Proszę wykazać, że X jest przestrzenią zwartą.

3 Niech $X = \mathbb{N}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee \exists_{n \in \mathbb{N}} x = \frac{1}{n}\}$. Proszę zbadać, czy istnieje funkcja nieciągła $f : X \to Y$ oraz funkcja nieciągła $g : Y \to X$. Odpowiedź uzasadnić, podać przykład, jeśli odpowiedź jest tak.

Egzamin z topologii I, Potok I, część I, 2003r.

Odpowiedz **TAK** lub **NIE** na poniższe 10 pytań (każde za 10 punktów) i krótko uzasadnij odpowiedź.

(1) Niech $C(I,R)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych na odcinku euklidesowym $I=[0,1]$ o wartościach w prostej euklidesowej R z metryką "supremum": $\rho(f,g)=\sup\{|\ f(x)-g(x)\ |: x\in I\}$. Czy zbiór $A=\{f\in C(I,R): 0<f(0)<1\}$ jest otwarty w przestrzeni $C(I,R)$?

(2) Czy podprzestrzenie $X=\{(x_1,x_2)\in R^2:\ \ x_1\neq 0\ \ \text{i}\ \ x_2=\frac{1}{x_1}\ \}$ i $Y=\{(x_1,x_2)\in R^2:\ x_2=2^{x_1}\ \text{lub}\ \ x_2=0\ \}$ płaszczyzny euklidesowej są homeomorficzne?

(3) Niech

$$X=\{(0,0)\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\}\times[0,\frac{1}{n}])\quad\text{i}\quad Y=\{(0,0)\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1])$$

będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej R^2. Czy istnieje przekształcenie ciągłe przestrzeni X na przestrzeń Y?

(4) Ile niehomeomorficznych podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej R^2 można utworzyć z okręgu o promieniu 1 i odcinka domkniętego o długości 1?

(5) Czy na płaszczyźnie euklidesowej R^2 suma dwóch zbiorów brzegowych jest zawsze zbiorem brzegowym?

(6) Czy istnieje przekształcenie ciagłe płaszczyzny euklidesowej R^2 na iloczyn metryczny $(R,\rho_e)\times(R,\rho_d)$, gdzie ρ_e jest metryką euklidesową, zaś ρ_d - metryką dyskretną w R?

(7) Czy podprzestrzeń $X=\{(x_1,x_2)\in R^2: x_1>0\ \ \text{i}\ \ x_2=\sin\frac{1}{x_1}\}$ płaszczyzny euklidesowej jest homeomorficzna z pewną przestrzenią metryczną zupełną?

(8) Czy przestrzeń metryczna X będąca sumą przeliczalnie wielu niepustych zbiorów otwartych $U_1,U_2,\ldots$ takich, że $U_i\cap U_j=\emptyset$ dla $i\neq j$, jest niespójna?

(9) Niech (X_1,ρ_1) będzie niepustą przestrzenią metryczną zwartą, zaś (X_2,ρ_2) - niepustą przestrzenią metryczną niezwartą. Czy iloczyn metryczny tych przestrzeni może być przestrzenią zwartą?

(10) Czy zbiór punktów izolowanych przeliczalnej nieskończonej przestrzeni metrycznej zupełnej może być skończony?

Topologia I, Potok I, egzamin, część teoretyczna, 2003r.

Punktacja: **1, 2, 3** - po 20 punktów, **4** - 15 punktów, **5** - 25 punktów.

1. Niech (X, ρ) i (Y, σ) będą przestrzeniami metrycznymi.
(a) Zdefiniować pojęcie ciągłości funkcji $f : X \to Y$.
(b) Podać dwa spośród znanych Pani(u) warunków równoważnych ciągłości funkcji f.

2. (a) Zdefiniować pojęcie spójności przestrzeni metrycznej.
(b) Pokazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłym przekształceniem przestrzeni metrycznej X na przestrzeń metryczną Y i przestrzeń X jest spójna, to przestrzeń Y jest też spójna.

3. (a) Podać definicję przestrzeni topologicznej.
(b) Zdefiniować pojęcie zwartości przestrzeni topologicznej.
(c) Podać charakteryzację zwartych podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej R^n.

4. (a) Podać definicję pętli zaczepionej w punkcie x_0 w przestrzeni metrycznej X.
(b) Podać definicję homotopii łączącej dwie pętle zaczepione w punkcie x_0 w przestrzeni X.

5. (a) Zdefiniować pojęcie zupełności przestrzeni metrycznej.
(b) Sformułować i udowodnić twierdzenie Cantora dla przestrzeni zupełnych.

Topologia I, Potok I, egzamin poprawkowy, część I, 2003r.
Punktacja: zadania 1, 2, 3, 4 - po 25 punktów.
Poniżej R oznacza zbiór liczb rzeczywistych, zaś Q - zbiór liczb wymiernych.
W zadaniu 1 proszę wypełnić tabelkę. Każde z zadań 2, 3 i 4 proszę rozwiązać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko i numer zadania.

---

1. Sprawdzić, czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny z metryką euklidesową

$A = Q \times Q, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = n^2\},$

$C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1]) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}), \quad D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \cdot x_2 > 0\}.$

mają następujące własności (należy postawić w odpowiedniej rubryce $+$, jeśli zbiór ma daną własność, lub $-$, jeśli jej nie ma):

podprzestrzeń	A	B	C	D
otwarta w R^2				
domknięta w R^2				
gęsta w R^2				
brzegowa w R^2				
spójna				
zwarta				

---

2. Zbadać spójność, zwartość i zupełność następujących podprzestrzeni płaszczyzny z metryką euklidesową. Czy są wśród nich przestrzenie homeomorficzne? Odpowiedzi krótko uzasadnić.
$X_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \ (-1 \le x_1 \le 1 \ \text{ i } \ x_2 = 0) \text{ lub } \ (x_1 = 0 \ \text{ i } \ -1 \le x_2 \le 1)\},$
$X_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \ (-1 < x_1 < 1 \ \text{ i } \ x_2 = 0) \text{ lub } \ (x_1 = 0 \ \text{ i } \ -1 < x_2 < 1)\},$
$X_3 = X_1 \setminus \{(0, 0)\}.$

---

3. a) Wskazać wnętrze int$A$ i domknięcie cl$A$ zbioru
$A = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1 < 1 \ \text{ i } \ 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in R^2 : -\infty < x_1 \le 0 \ \text{ i } x_2 = 0\}$ na płaszczyźnie z metryką kolejową.

b) Wskazać wnętrze int$B$ i domknięcie cl$B$ zbioru $B = \{f \in C(I, R) : f(0) = 2\}$ w przestrzeni $C(I, R)$ funkcji ciągłych określonych na odcinku euklidesowym $I = [0, 1]$ o wartościach w prostej euklidesowej R z metryką "supremum": $\rho(f, g) = \sup\{| f(x) - g(x) |: x \in I\}$.

---

4. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą z metryką ρ, zaś A - domkniętym podzbiorem przestrzeni X. Pokazać, że podprzestrzeń $B = \{x \in X : \rho(x, A) \ge 1\}$ przestrzeni X jest zwarta.

Przypomnijmy, że dla $x \in X$ i $A \subset X$, $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$.

Zadanie dodatkowe. Niech A będzie przeliczalnym podzbiorem przestrzeni metrycznej zupełnej X. Pokazać, że w podprzestrzeni $Y = X \setminus A$ przestrzeni X jest spełnione twierdzenie Baire'a.

Topologia I, Potok I, egzamin poprawkowy, część teoretyczna, 2003r.
Punktacja: zad.1 -15 p, zad.2 -20p, zad.3 -15p - razem 50 punktów

1. (a) Podać definicję zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej (X, ρ).
(b) Podać definicję domknięcia zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, ρ).
(c) Podać definicję homeomorfizmu między przestrzeniami metrycznymi (X, ρ) i (Y, σ).

2. (a) Podać definicję przestrzeni metrycznej zwartej.
(b) Pokazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłym przekształceniem przestrzeni metrycznej X na przestrzeń metryczną Y i przestrzeń X jest zwarta, to przestrzeń Y jest też zwarta.

3. (a) Podać definicję ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej X.
(b) Podać definicję przestrzeni metrycznej zupełnej.
(c) Sformułować twierdzenie Baire'a.

Zadanie dodatkowe. Podać dowód twierdzenia Tichonowa mówiącego, że iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni topologicznych zwartych Hausdorffa (rozpatrywany z topologią Tichonowa) jest przestrzenią zwartą Hausdorffa.

10.12.2004

KOLOKWIUM II - TOPOLOGIA

ZA KAŻDE ZADANIE MOŻNA UZYSKAĆ MAKSYMALNIE 25 PUNKTÓW. ZADANIA 3 I 4 MOŻNA ROZWIĄZYWAĆ ZAKŁADAJĄC, ŻE WSZYSTKIE PRZESTRZENIE SĄ METRYCZNE ALE WÓWCZAS MAKSYMALNA ILOŚĆ PUNKTÓW, KTÓRĄ MOŻNA UZYSKAĆ ZA ROZWIĄZANIE WYNOSI 20.

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ

ZADANIA

---

1. Niech A będzie podzbiorem odcinka otwartego $(-\pi/2, \pi/2)$ zawierajacym 0 i niech $T(A)$ będzie sumą odcinków domkniętych w $\mathbb{R}^2$ łączących punkt $(0,0)$ z punktami $(s, tan(s))$ na wykresie funkcji tangens dla $s \in A$. Wykazać, że przestrzeń $(T(A), d_e)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem domkniętym na prostej euklidesowej.(Oczywiście d_e oznacza tutaj metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$.)

2. Niech F będzie zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej i niech dla $n = 1, 2, ..., F_n$ będzie sumą prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ przechodzących przez punkt $(0, n)$ i punkty ze zbioru $F \times \{1/2\}$. Wykazać, że istnieje punkt $t \in \mathbb{R}$ taki, że

$$(t, 0) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

.

3. Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T})$ i niech I_x będzie odcinkiem domkniętym na płaszczyźnie łączącym punkty $(f(x), 0)$ i $(f(x), g(x))$. Wykazać, że suma odcinków $\bigcup\{I_x : x \in X\}$ jest zbiorem zwartym na płaszczyźnie euklidesowej.

4. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w prostą euklidesową. Wykazać, że podprzestrzeń $Y = \{(x, f(x) + t) : x \in X \ , \ t \in [0, 1]\}$ iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ i prostej $\mathbb{R}$ jest homeomorficzna z podprzestrzenią $X \times [0, 1]$ tego iloczynu.

TOPOLOGIA 1, wykładowca STANISŁAW BETLEY

Egzamin, 26.01.04.

I. Część teoretyczna.

1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.
a. Podać definicję podzbioru otwartego w X.
b. Udowodnić, że część wspólna dwóch podzbiorów otwartych w X jest podzbiorem otwartym.
c. Wyrazić ciągłość odwzorowania $f : X \to Y$ przestrzeni metrycznych w języku podzbiorów otwartych X i Y.

2. a. Podać definicję przestrzeni topologicznej spójnej.
b. Udowodnić, że ciągły obraz przestrzeni spójnej jest spójny.
c. Podać przykład spójnego podzbioru A płaszczyzny euklidesowej R^2, którego wnętrze nie jest spójne.

3. a. Zdefiniować zwartość przestrzeni metrycznej (X, d).
b. Niech A będzie podzbiorem zwartej przestrzeni metrycznej X. Pokazać, że A jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięty w X.
c. Zdefiniować zwartość przestrzeni topologicznej.

4. a. Zdefiniować homotopijność dwóch odwzorowań ciągłych $f, g : X \to Y$.
b. Udowodnić, że jeśli A jest wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej R^n to dowolne dwa $f, g : X \to A$ są homotopijne.
c. Zdefiniować przestrzeń ściągalną.
d. Udowodnić, że jeśli Y jest ściągalna a y_0 jest ustalonym punktem Y to dowolne
$f : X \to Y$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym $f_{y_0} : X \to Y$ określonym wzorem $f_{y_0}(x) = y_0$.

II. Zadania.

1. Niech A będzie otwartym, zaś B dowolnym podzbiorem przestrzeni topologicznej X i niech $A \cap B = \emptyset$. Pokazać, że $\bar{A} \cap Int\bar{B} = \emptyset$. Czy $Int\bar{B} = IntB$?

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną a A i B jej podprzestrzeniami takimi, że $A \subset B$. Załóżmy, że A jest gęsta w B a B gęsta w X. Pokazać, że wówczas A jest gęstą podprzestrzenią X.

3. Niech A będzie podzbiorem płaszczyzny euklidesowej składającym się z punktów o obu współrzędnych wymiernych. Udowodnić, że przestrzeń $R^2 \setminus A$ jest spójna. Czy $R^2 \setminus A$ pozostanie spójna, gdy zmienimy metrykę na metrykę rzeka ?

4. Niech C_i będzie zwartym podzbiorem odcinka $[i, i+1]$, gdzie i jest dowolna liczbą całkowitą. Niech $X = \bigcup_{i \in Z} C_i$. Pokazać, że dla dowolnego $a \in R$ istnieje $b \in X$ takie, że $d(a, X) = d(a, b)$.
(Przypomnienie: $d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x)$)

5. Niech $I(x, y)$ oznacza odcinek na płaszczyźnie łączący x z y. Niech $x_n = (1/n, 0)$, $y = (0, 1)$ a $x_0 = (0, 0)$. Niech $X = I(x_0, y) \cup \bigcup_{n \in N} I(x_n, y)$. Niech d_k oznacza metrykę kolejową na R^2 z węzłem w x_0.
a. Czy $I(x_1, y)$ jest zupełną podprzestrzenią (R^2, d_k) ?
b. Czy X jest zupełną podprzestrzenią (R^2, d_k) ?

TOPOLOGIA 1, wykładowca STANISŁAW BETLEY

Egzamin, 05.03.04.

I. Część teoretyczna.

1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.
a. Podać definicję ciągu Cauchyego w X.
b. Podać definicję przestrzeni metrycznej zupełnej.
c. Udowodnić, że domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej jest zupełna.
d. Podać przykład pokazujący, że w punkcie c. słowa "domknięta" nie można zastąpić słowem "otwarta".

2. a. Podać definicję przestrzeni topologicznej ośrodkowej.
b. Udowodnić, że ciągły obraz przestrzeni ośrodkowej jest przestrzenią ośrodkowa.
c. Czy płaszczyzna R^2 z metryką kolejową jest przestrzenią ośrodkową ?

3. a. Zdefiniować pojęcie topologii w zbiorze X.
b. Niech A będzie zbiorem trzy-punktowym, $A = \{a, b, c\}$. Czy rodzina podzbiorów A składająca się z czterech zbiorów: A, $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a, b\}$ wyznacza topologię w A ?
c. Czy przestrzeń A z topologia z punktu b. jest Hausdorffa ?

4. a. Zdefiniować homotopijność dwóch odwzorowań ciągłych $f, g : X \to Y$.
b. Zdefiniować przestrzeń ściągalną.
c. Udowodnić, że jeśli A jest ściągalna to dowolne dwa $f, g : X \to A$ są homotopijne.

II. Zadania.

1. Niech A i B będą dowolnymi podzbiorem przestrzeni topologicznej X i niech $A \cap B = \emptyset$. Pokazać, że $IntA \cap \bar{B} = \emptyset$. Czy dla dowolnego zbioru A zachodzi: $Int\bar{A} = IntA$?

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną a A jej otwartym podzbiorem. Niech B będzie brzegowym podzbiorem X. Udowodnić, $A \cap B$ jest brzegowym podzbiorem w A. Podać przykład pokazujący, że twierdzenie powyższe stanie się fałszywe gdy otwartość A zamienimy na domkniętość.

3. Niech A będzie niepustym podzbiorem R^2 zawartym w prostej o równaniu $x = 0$.
a) Załóżmy, że na R^2 mamy metrykę euklidesową i A jest zwarty. Udowodnić, że $R^2 \setminus A$ jest przestrzenią spójną.
b) Rozpatrzmy R^2 z metryką kolejową o węźle w $(0, 0)$ i załóżmy, że A jest zwarty w tej metryce. Czy $R^2 \setminus A$ jest przestrzenią spójną ?

4. Niech $I = [0, 1]$ i niech $f : I \to R$ będzie dowolną funkcją. Udowodnić, że jeśli wykres $W(f) = \{(x, f(x))|x \in I\} \subset R^2$ jest zwartym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej to f jest funkcją ciągłą.

5. Niech $I(x, y)$ oznacza odcinek na płaszczyźnie łączący x z y. Niech $x_n = (1/n, 0)$, $y = (0, 1)$ a $x_0 = (0, 0)$. Niech $X = I(x_0, y) \cup \bigcup_{n \in N} I(x_n, y)$. Niech d_r oznacza metrykę rzeka na R^2 z rzeką będąca prostą $y = 0$.
a. Czy $I(x_1, y)$ jest zupełną podprzestrzenią (R^2, d_r) ?
b. Czy X jest zupełną podprzestrzenią (R^2, d_r) ?

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 03.02.05

CZĘŚĆ I: ZADANIA

Punktacja: Każde zadanie 25pkt.

1. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $M(A) \subset \mathbb{R}^2$ będzie sumą odcinków domkniętych łączących punkt $(0,1)$ z punktami $(a, |a|)$ dla $a \in A$. Wykazać, że zbiór $M(A)$ jest domknięty na płaszczyźnie euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem zwartym na prostej euklidesowej.

2. Niech $C \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym i brzegowym na prostej euklidesowej i niech S będzie sumą prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt $(0, \sqrt{2})$ i punkty $(c, 0)$ dla $c \in C$. Wykazać, że istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdej liczby wymiernej q, $(a, q) \notin S$.

3. Niech $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, 3, ...$ i niech $S = ((0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0, a_n]$.
(A) Wykazać, że S jest zbiorem spójnym na płaszczyźnie euklidesowej.
(B) Wykazać, że podzbiór $S \cup (\{0\} \times (0,1])$ płaszczyzny euklidesowej jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg a_n nie jest zbieżny do 0.

4. Niech $U \subset X$ będzie niepustym zbiorem otwartym w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Niech $f : U \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą i niech $Y = ((X \setminus U) \times [0,1]) \cup \{(x,t) :\ x \in U,\ \ t \in [0, f(x)]\}$.
(A) Wykazać, ze jeśli przestrzeń X jest zwarta, to zbiór Y jest zwarty w iloczynie kartezjańskim $X \times [0,1]$.
(B) Wykazać, że jeśli przestrzeń X jest łukowo spójna to zbiór Y jest łukowo spójny w iloczynie kartezjańskim $X \times [0,1]$.

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 03.02.05

CZĘŚĆ II: TEORIA

Punktacja: W każdym zadaniu część A - 5pkt, część B - 10pkt, część C - 10pkt

1. (A) Podać definicję topologii w zbiorze X.
(B) Określić topologię w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.
(C) Niech A będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.
Udowodnić, że $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, gdzie $\overline{A}$ oznacza domknięcie zbioru A w $(X, \mathcal{T})$.

2. (A) Podać definicję zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d).
(B) Sformułować twierdzenie Baire'a.
(C) Udowodnić, że domknięty podzbiór przestrzeni zupełnej jest przestrzenią zupełną .

3. (A) Podać definicję spójnej przestrzeni topologicznej.
(B) Zdefiniować przestrzeń łukowo spójną i podać przykład przestrzeni spójnej ale nie łukowo spójnej. Uzasadnić spójność przestrzeni w podanym przykładzie.
(C) Udowodnić, że iloczyn kartezjański $X \times Y$ przestrzeni spójnych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójny.

4. (A) Zdefiniować pojęcie homotopii między przekształceniami ciągłymi $f, g : X \to Y$.
(B) Wykazać, że jeśli A jest zbiorem wypukłym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ to każde dwa przekształcenia ciągłe $f, g : X \to A$ są homotopijne.
(C) Wyprowadzić z nieściągalności okręgu twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla dysku D^2.

EGZAMIN POPRAWKOWY Z TOPOLOGII, 05.03.05

CZĘŚĆ I: TEORIA

Punktacja: W każdym zadaniu część A - 5pkt, część B - 10pkt, część C - 10pkt

1. (A) Podać definicję ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$ z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(B) Sformułować twierdzenie Tietzego o przedłużaniu przekształceń ciągłych.

(C) Udowodnić, że jeśli metryki d_X i d_Y generują topologie $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_Y$ w X i Y to warunek (A) jest równoważny klasycznej definicji ciągłości: dla dowolnego $\epsilon > 0$ i dowolnego punktu $a \in X$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in X$ spełniającego $d_X(x, a) < \delta$ zachodzi $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

2. (A) Podać definicję zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d).

(B) Sformułować twierdzenie Baire'a.

(C) Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Udowodnić, że X jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy gdy jest przestrzenią całkowicie ograniczoną.

3. (A) Określić w $X \times Y$ topologię iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(B) Niech metryki d_X i d_Y generują topologie $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_Y$ w X i Y. Określić metrykę na $X \times Y$ generująca topologię iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(C) Udowodnić, że iloczyn kartezjański $X \times Y$ przestrzeni metrycznych zwartych jest przestrzenią zwartą.

4. (A) Zdefiniować pojęcie homotopii między przekształceniami ciągłymi $f, g : X \to Y$.

(B) Wykazać, że jeśli A jest zbiorem wypukłym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ to każde dwa przekształcenia ciągłe $f, g : X \to A$ są homotopijne.

(C) Wyprowadzić z nieściągalności okręgu twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla dysku D^2.

EGZAMIN POPRAWKOWY Z TOPOLOGII, 05.03.05

CZĘŚĆ II: ZADANIA

Punktacja: Każde zadanie 25pkt.

1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją określoną formułą $f(x, y) = (x, |x|)$. Znaleźć zbiór punktów ciągłości f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_r)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$, gdzie d_r jest metryką "rzeka" na płaszczyźnie określoną wzorem

$$d_r((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{jeśli } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|, & \text{jeśli } x_1 \neq x_2. \end{cases} \tag{1}$$

.

2. Niech F_n dla $n = 1, 2, ...$ będą zbiorami domkniętymi na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ takimi, że dla każdej pary liczb rzeczywistych $a < b$ oraz naturalnego n, zbiór $\{t \in \mathbb{R} : \{t\} \times [a, b] \subset F_n\}$ jest brzegowy na prostej euklidesowej. Wykazać, że

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

3. Niech $A \subset (0, +\infty)$ i niech $S(A)$ będzie sumą wszystkich odcinków domkniętych w $\mathbb{R}^2$ łączących punkty zbioru $A \times \{0\}$ z punktami zbioru $\{0\} \times A$. Wykazać, że zbiór $S(A)$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A na prostej jest zwarty.

4. Niech $a_n \geq 1$ dla $n = 1, 2, 3, ...$ i niech $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0, a_n] \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.
(A) Wykazać, że X jest zbiorem spójnym na płaszczyźnie euklidesowej.
(B) Wykazać, że podzbiór $Y = X \cup \{(0, n) : n = 1, 2, ...\}$ płaszczyzny euklidesowej jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg a_n jest nieograniczony.