Egzamin z Topologii I Zestaw **A** 28.02.2012

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Odpowiedzi do zadań 2–4 należy uzasadnić 25 punktów za każde zadanie

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać swoje imię i nazwisko, numer zadania oraz literę oznaczającą zestaw.

1. Niech X_1 będzie następującą podprzestrzenią przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ z metryką „supremum" $d_1 = d_{sup}$:

$$X_1 = \{f \in C[0,1] : 1 \leq |f(0)| \leq 2\}.$$

Dla punktów p, $q \in \mathbb{R}^2$ niech $I(p,q)$ oznacza odcinek domknięty o końcach p,q. Niech $a = (0,2), b = (0,-2), a_n = (1/n,1), b_n = (1/n,-1)$ oraz $A = (\bigcup_{n=1}^{\infty} I(a,a_n)) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} I(b,b_n))$. Rozważamy następujące podprzestrzenie X_i płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową $d_i = d_e, i = 2,3$:

$$\begin{aligned} X_2 &= A \cup I(a,b), \\ X_3 &= A \cup I((0,1),(0,-1)) \cup \{(0,q) \colon q \in \mathbb{Q}, 1 \leq |q| \leq 2\}. \end{aligned}$$

Sprawdzić, czy przestrzenie (X_i, d_i) mają następujące własności (należy postawić w odpowiedniej rubryce poniższej tabeli T, jeśli zbiór ma daną własność, lub N, jeśli jej nie ma):

	X_1	X_2	X_3
X_i jest zwarta			
X_i jest zupełna w metryce d_i			
X_i jest metryzowalna w sposób zupełny			
X_i jest spójna			
X_i jest łukowo spójna			
X_i jest ściągalna			

2. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą domkniętymi brzegowymi podzbiorami płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$, a $L_1, L_2, \ldots$ będą prostymi na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że istnieje punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ taki, że jego odległość (w metryce euklidesowej) od każdej prostej L_i jest liczba niewymierną.

3. Dane są następujące podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \times \{\frac{1}{n}\}),\\
Y_2 &= Y_1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\}),\\
Y_3 &= Y_1 \cup ([-1, 1] \times \{0\}),\\
Y_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in \mathbb{R},\ y \geq e^x\} \cup (\mathbb{R} \times \{0\}).
\end{aligned}
$$

(A) Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ wyjaśnić, podając uzasadnienie, czy Y_i jest spójne.

(B) Wyjaśnić, podając uzasadnienie, czy przestrzenie Y_2 i Y_3 są homeomorficzne.

4. Niech (X, τ) będzie przestrzenią Hausdorffa, a $r : X \to A$ będzie przekształceniem ciągłym na podprzestrzeń $A \subset X$ takim, ze $r(x) = x$, dla każdego $x \in A$.

(A) Wykazać, że A jest domkniętym podzbiorem X.

(B) Udowodnić, że jeśli X jest przestrzenią ściągalną, to również podprzestrzeń A jest ściągalna.

Egzamin z Topologii I Teoria Zestaw **A** 28.02.2012

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Uzasadnienie jest wymagane wyłącznie w poleceniu 14.
Punktacja: 11 punktów za polecenie 14, po 3 punkty za każde pozostałe polecenie.

---

1. Podać definicję metryki.
2. Zdefiniować wnetrze podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ).
3. Podać definicję topologii iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ przestrzeni topologicznych (X, τ_X) i (Y, τ_Y).
4. Podać przykład przestrzeni topologicznej (X, τ), która nie jest przestrzenią Hausdorffa.
5. Podać przykład ośrodkowej przestrzeni topologicznej (X, τ), która nie ma przeliczalnej bazy.
6. Podać definicję przestrzeni topologicznej zwartej (X, τ).
7. Podać przykład nieskończonej, zwartej podprzestrzeni przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ z metryką „supremum"
8. Sformułować twierdzenie Baire'a.
9. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w przestrzeni topologicznej (X, τ). Zdefiniować przestrzeń ilorazową $(X/\sim, \tau/\sim)$ (podać definicje zbioru $X/\sim$ i topologii $\tau/\sim$).
10. Podać przykład relacji równoważności $\sim$ na prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, \tau_e)$ takiej, ze przestrzeń ilorazowa $(\mathbb{R}/\sim, \tau_e/\sim)$ jest homeomorficzna z okręgiem S^1.
11. Podać przykład spójnej podprzestrzeni prostej $\mathbb{R}$ z topologią „strzałki" (topologia „strzałki" jest generowana przez bazę złożoną z odcinków $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$).
12. Podać definicję homotopii pętli α, β w przestrzeni topologicznej (X, τ), zaczepionych w punkcie $a \in X$.
13. Podać przykład przekształcenia ciągłego przestrzeni ściągalnej X na przestrzeń nieściągalną Y.
14. Udowodnić, że metryzowalna przestrzeń ośrodkowa ma przeliczalną bazę.