Topologia, Egzamin II termin
7 marca 2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia
- numer rozwiązywanego zadania

Zadanie 1

Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych wymiernych.

(a) Zbadać czy podzbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ jest gęstym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka.

(b) Pokazać, że każdy gęsty podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka jest nieprzeliczalny.

Zadanie 2

Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem płaszczyzny euklidesowej. Przez $S(a,r)$ oznaczamy okrąg na płaszczyźnie o środku w a i promieniu r. Niech $S(A) = \bigcup_{a \in A} S(a,1)$. Wykazać, że

(a) jeżeli A jest spójne, to $S(A)$ też jest spójne

(b) jeżeli A jest zwarte, to $S(A)$ też jest zwarte

Zadanie 3

Niech $S((x_1,x_2)),r)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie (x_1,x_2) i promieniu $r > 0$ i niech

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S((\frac{1}{n},0),\frac{1}{n}), \quad X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S((0,0),\frac{1}{n}) \cup \{(x_1,x_2) : x_1 \in [0,1], x_2 = 0\},$$

$$X_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S((a_n,0),a_n) \cup S((1,0),1), \quad X_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S((a_n,0),a_n),$$

gdzie $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ dla $n = 1,2,\ldots$ Dla każdej pary $i, j \neq i$ ustalić czy przestrzenie X_i oraz X_j są homeomorficzne.

Zadanie 4

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ i $g : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ będą takimi ciągłymi odwzorowaniami, że

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d_e(x,y) = 0,$$

gdzie $A = f([0,1])$ i $B = g((0,1))$. Zbadać czy $A \cup B$ musi być spójne.

Metryka rzeka d_r jest określona wzorem

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b) & \text{jeżeli } p(a) = p(b) \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)) & \text{jeżeli } p(a) \neq p(b), \end{cases}$$

gdzie $p(x,y) = (x,0)$ i d_e oznacza metrykę euklidesową.