Egzamin poprawkowy z Topologii I Zestaw **A** 01.03.2011

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Odpowiedzi do zadań 2–4 należy uzasadnić 25 punktów za każde zadanie

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać swoje imię i nazwisko, numer zadania oraz literę oznaczającą zestaw.

---

1. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, zaś $C \subset [0,1]$ będzie standardowym zbiorem Cantora. Sprawdzić, czy poniższe podprzestrzenie płaszczyzny z metryką euklidesową

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y = qx^2,\ q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}\}, \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 > 1\}, \\ A_3 &= (C \times [-1,1]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \colon\ x \in [-1,0)\}, \end{aligned}$$

mają następujące własności (należy postawić w odpowiedniej rubryce $+$, jeśli zbiór ma daną własność, lub $-$, jeśli jej nie ma):

	A_1	A_2	A_3
A_i jest zwarta			
A_i jest zupełna w metryce d_e			
A_i jest metryzowalna w sposób zupełny			
A_i jest spójna			
A_i jest łukowo spójna			
A_i jest ściągalna			

2. Niech A_n, $n = 1, 2, \ldots$, będą domkniętymi brzegowymi podzbiorami prostej euklidesowej. Wykazać, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(\cos x, \sin x)\colon\ x \in A_n\}$ jest brzegowym podzbiorem okręgu jednostkowego S^1 z topologią euklidesową.

3. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, a $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych. Dane są następujące podprzestrzenie X_1, X_2, X_3, X_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, \tan x)\colon\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ X_2 &= \mathbb{Z} \times (0, 1), \\ X_3 &= (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]), \\ X_4 &= \mathbb{Q} \times [0, 1]. \end{aligned}$$

(A) Zbadać zwartość i zupełność w metryce euklidesowej tych przestrzeni.

(B) Zbadać, dla jakich $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$, przestrzenie X_i i X_j są ze sobą homeomorficzne.

4. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, $A = \{(\frac{1}{n}, a_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ i niech

$$X = (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\} \times \mathbb{R}) \ \cup\ A.$$

(A) Wykazać, że podprzestrzeń X płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ jest spójna.

(B) Wykazać, że przestrzeń X jest łukowo spójna wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Egzamin poprawkowy z Topologii I Teoria Zestaw **A** 01.03.2011

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Uzasadnienie jest wymagane wyłącznie w poleceniu 14.
Punktacja: 11 punktów za polecenie 14, po 3 punkty za każde pozostałe polecenie.

---

1. Podać definicję bazy przestrzeni topologicznej (X, τ).

2. Zdefiniować domknięcie podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ).

3. Podać definicję przestrzeni Hausdorffa.

4. Sformułować twierdzenie Tietzego.

5. Podać przykład homeomorfizmu h przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) na przestrzeń metryczną (Y, ρ), która nie jest zupełna.

6. Podać przykład nieprzeliczalnego, domkniętego i brzegowego podzbioru prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$.

7. Podać przykład spójnej i nieośrodkowej przestrzeni metrycznej (X, d).

8. Podać przykład spójnej podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$, która ma dokładnie 3 składowe łukowej spójności.

9. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w przestrzeni topologicznej (X, τ). Zdefiniować przestrzeń ilorazową $(X/\sim, \tau/\sim)$ (podać definicje zbioru $X/\sim$ i topologii $\tau/\sim$).

10. Podać przykład przestrzeni metrycznej (X, d) oraz relacji równoważności $\sim$ w zbiorze X takiej, że przestrzeń ilorazowa $(X/\sim, \tau_d/\sim)$ nie jest metryzowalna.

11. Podać definicję przestrzeni ściągalnej.

12. Podać definicję pętli zaczepionej w punkcie a przestrzeni topologicznej (X, τ).

13. Podać przykład trzech, parami niehomotopijnych, pętli α, β, γ zaczepionych w punkcie $(1, 0)$ okręgu $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ (z topologią euklidesową).

14. Udowodnić, że każda zwarta przestrzeń metryczna (X, d) jest ośrodkowa.