Imię i nazwisko **Nr indeksu**

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 29.01.2015.
Zadania 1, 2 i 3 proszę rozwiązać na osobnych kartkach. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko, numer indeksu, numer tematu, numer zadania i numer grupy ćwiczeniowej.

Temat 001. KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

Zad.1. Dane są następujące podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$Y_1 = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1 - \frac{1}{n}])$,

$Y_2 = Y_1 \cup (\{0\} \times [0,1])$,

$Y_3 = Y_2 \cup I\,((0,1),(1,0))$, gdzie $I(a,b)$ oznacza odcinek domknięty na płaszczyźnie o końcach a i b,

$Y_4 = Y_2 \setminus \{(0,1)\}$.

(a) Orzec o spójności przestrzeni Y_1, Y_2, Y_3 i Y_4. Uzasadnić swoją odpowiedź dla Y_1 i Y_4.

(b) Dla każdej pary różnych indeksów $i \neq j$ wyjaśnić, podając uzasadnienia, czy przestrzeń Y_i jest homeomorficzna z Y_j.

Zad.2. Niech $(C[0,1], d_{\sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z odcinka euklidesowego $[0,1]$ w prostą euklidesową $(\mathbb{R}, d_e)$, z metryką supremum: $d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$.

Rozpatrzmy następujące podprzestrzenie tej przestrzeni:

$T = \{f \in C[0,1] : \quad f(0) \neq f(1)\}$,

$Z = \{f \in C[0,1] : \quad f(0) \leq f(1)\}$.

Zbadać spójność i ściągalność przestrzeni T i Z. Uzasadnić swoją odpowedź.

Zad.3. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech $K_1, K_2, \ldots$ będą zbiorami zwartymi w przestrzeni (X,d) (ciąg $K_1, K_2, \ldots$ nie musi być zstępujący).

Niech $C_n = \{x \in X : \text{ dist } (x, K_n) \leq \frac{1}{n}\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz niech $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ będzie podprzestrzenią X.

(a) Wykazać, że podprzestrzeń C przestrzeni (X,d) jest zwarta.

<u>Wskazówka.</u> Rozpatrzyć całkowitą ograniczoność przestrzeni C z metryką d obciętą do C.

(b) Podać przykład przestrzeni metrycznej zupełnej (X,d) oraz jej zwartego podzbioru K takiego, że zbiór $C_2(K) = \{x \in X : \text{dist}(x,K) \leq \frac{1}{2}\}$ nie jest zwarty. Uzasadnić jedynie, że zbiór $C_2(K)$ nie jest zwarty.

Imię i nazwisko **Nr indeksu**

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 29.01.2015.

Temat A.

Zad. 4. (25 punktów). Niech $X_1 = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-2, 2])$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$, oraz

niech X_2 będzie przestrzenią ilorazową $X_2 = X_1/A$, gdzie $A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(1, \sin 1)\}$.

Niech $\tilde{Q}$ będzie zbiorem liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$, zaś dla $a, b \in \mathbb{R}^2$ niech $I(a, b)$ oznacza odcinek domknięty o końcach a, b. Rozważmy następujący podzbiór $\mathbb{R}^2$:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I((0,0), (1, \frac{1}{n})) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \Big(\tilde{Q} \times [-1, 0]\Big).$$

Niech X_3 oznacza zbiór B z topologią euklidesową, zaś X_4 - zbiór B z topologią wyznaczoną przez metrykę "rzeka".

Stwierdzić, czy przestrzenie X_1, X_2, X_3, X_4 mają następujące własności (należy tylko wpisać w odpowiedniej rubryce poniższej tabelki TAK, jeśli podprzestrzeń ma daną własność lub NIE, jeśli jej nie ma):

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_i jest zwarta				
X_i jest ośrodkowa				
X_i jest metryzowalna w sposób zupełny				
X_i jest spójna				
X_i jest łukowo spójna				
X_i jest ściągalna				

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 29.01.2015. TEORIA

Temat A.

1. (10 punktów) (a) Podać definicję przestrzeni Hausdorffa oraz definicję zwartości przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

(b) Podać dwa warunki równoważne zwartości w zakresie przestrzeni metryzowalnych.

2. (10 punktów) (a) Podać definicję zupełności przestrzeni metrycznej (X, d). Podać definicję przekształcenia zwężającego przestrzeni (X, d) w siebie.

(b) Sformułować twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających.

3. (10 punktów) (a) Podać definicje spójności i łukowej spójności przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

(b) Pokazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest przekształceniem ciągłym spójnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójna.

4. (10 punktów) (a) Podać definicję homotopii przekształceń ciągłych $f, g : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Podać definicję przestrzeni ściągalnej.

(b) Pokazać, że każda przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

(c) Niech $\mathbb{C}$ oznacza płaszczyznę zespoloną. Podać przykład (bez uzasadnienia) dwóch niehomotopijnych przekształceń $f, g : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

5. (a) (5 punktów) Opisać bazę topologii $\mathcal{T}$ w iloczynie kartezjańskim $(X \times Y, \mathcal{T})$ przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(b) (15 punktów za przypadek ogólny, 5 punktów za dowód dla przestrzeni metrycznych) Udowodnić, że iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni topologicznych zwartych jest przestrzenią topologiczną zwartą.