IMIĘ I NAZWISKO **Temat 110**

nr indeksu

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 05.02.2009.
Każde zadanie proszę rozwiązać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko, numer indeksu, numer tematu i numer zadania.
KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

---

1. Niech $X = C(I, R)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych na odcinku euklidesowym $I = [0, 1]$ o wartościach w prostej euklidesowej R z metryką "supremum": $d_{\sup}(f, g) = \sup\{\,|\,f(x) - g(x)\,|:\ x \in I\}$. Dla podprzestrzeni

$$B = \{f \in C(I, R):\ f(\tfrac{1}{2}) = f(1)\ \}$$

przestrzeni $C(I, R)$ z metryką $d_{\sup}$ wypełnić poniższą tabelkę, wstawiając w odpowiedniej rubryce TAK, jeśli B ma daną własność, lub NIE, jeśli jej nie ma:

	B
domknieta w X	
otwarta w X	
brzegowa w X	
gęsta w X	
zupełna w metryce $d_{\sup}$	
spójna	
ściągalna	

---

2. Dla $x, y \in \mathbb{R}^2$ niech $I(x, y)$ oznacza odcinek domknięty na płaszczyźnie o końcach x, y. Niech $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$, $b_n = (1, \frac{1}{n})$, $c_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, dla $n = 1, 2, \ldots$. Rozważmy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej:

$Y_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a_0, c_n)$, $Y_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a_0, b_n) \cup I(a_0, a_1)$,

$Y_3 = Y_1 \setminus \{(0, 0)\}$, $Y_4 = Y_2 \setminus I(a_0, a_1) = \{(x_1, x_2) \in Y_2 : x_2 > 0\}$.

Wyjaśnić, podając uzasadnienia, dla jakich $i \neq j$ przestrzeń X_i jest homeomorficzna z X_j.

---

3. Niech Q oznacza zbiór liczb wymiernych z przedziału [0,1]. Dane są następujące podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$Y_1 = (Q \times \mathbb{R}) \cup ([0, 1] \times \{0\})$, $Y_2 = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times \mathbb{R}) \cup ([0, 1] \times \{0\})$,

$Y_3 = Y_1 \setminus \{(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)\}$, $Y_4 = Y_1 \setminus \{(\frac{1}{3}, 0)\}$.

(a) Wyjaśnić, podając uzasadnienia, które z tych przestrzeni są spójne.

(b) Wyjaśnić, podając uzasadnienie, czy przestrzenie Y_1 i Y_2 są homeomorficzne.

---

4. Niech $B \subset [0, 1]$ będzie zbiorem domkniętym brzegowym w odcinku euklidesowym [0,1].

(a) Wykazać, że istnieje liczba $s \in [0, 1]$ taka, że

($\star$) dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n punkt $(s, \frac{s}{n})$ nie leży na okręgu o środku w $(0, 0)$ i promieniu należącym do B.

(b) Wykazać, że istnieje liczba niewymierna $s \in [0, 1]$ spełniająca warunek ($\star$).

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 05.02.2009. TEORIA

1. (10 punktów) (a) Podać definicję zupełności przestrzeni metrycznej (X, d).

(b) Podać definicję przekształcenia zwężającego przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie. Sformułować twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających.

2. (10 punktów) (a) Zdefiniować topologię iloczynu kartezjańskiego przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(b) Podać definicję ciągłości funkcji $f : X \to Y$ z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Pokazać, że rzutowanie $p : X \times Y \to X$ iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ na X jest funkcją ciągłą.

3. (10 punktów) (a) Podać definicję zwartości przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$.

(b) Pokazać, że podprzestrzeń domknięta przestrzeni topologicznej zwartej jest zwarta.

4. (10 punktów) (a) Podać definicję homotopii przekształceń ciągłych $f, g : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(b) Podać definicję przestrzeni ściągalnej. Podać przykład nieściągalnej podprzestrzeni przestrzeni ściągalnej.

(c) Podać definicję pętli zaczepionej w punkcie a w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$. Podać definicję homotopii pętli α, β zaczepionych w punkcie a w przestrzeni X.

5. (10 punktów) Podać definicję łukowej spójności przestrzeni topologicznej i udowodnić, że podprzestrzeń $T = \{(t, \sin(\frac{1}{t})) : t \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ płaszczyzny euklidesowej nie jest łukowo spójna.