Imię i nazwisko **Nr indeksu**

EGZAMIN Z TOPOLOGII, POTOK I, 04.02.2010.
Zadania 2, 3 i 4 proszę rozwiązać na osobnych kartkach. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko, numer indeksu, numer tematu i numer zadania.
Temat 100. KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

---

1. Niech $\tilde{Q}$ będzie zbiorem liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$. Stwierdzić, czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny z metryką euklidesową $(\mathbb{R}^2, d_e)$:

$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$,

$A_2 = \Big([0,1] \times \tilde{Q}\Big) \cup (\{0\} \times [0,1])$, $\quad A_3 = A_2 \cup \{(1, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$,

mają następujące własności (należy tylko wpisać w odpowiedniej rubryce poniższej tabelki TAK, jeśli podprzestrzeń ma daną własność lub NIE, jeśli jej nie ma):

	A_1	A_2	A_3
A_i jest zwarta			
A_i jest zupełna w metryce d_e			
A_i jest metryzowalna w sposób zupełny			
A_i jest spójna			
A_i jest łukowo spójna			
A_i jest ściągalna			

---

2. Niech $a_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, $b_n = (-n, 0)$, $c_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ będą punktami $\mathbb{R}^2$ i niech $J = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ będzie odcinkiem otwartym na prostej $\mathbb{R}$. Rozważmy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej:

$Z_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\{\frac{1}{n}\} \times J\right)$, $\quad Z_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{c_n\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\{\frac{1}{n}\} \times J\right)$,

$Z_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\} \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$, $\quad Z_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{b_n\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{n\} \times \mathbb{R})$.

Dla każdej pary różnych indeksów $i \neq j$ wyjaśnić, podając uzasadnienia, czy przestrzeń Z_i jest homeomorficzna z Z_j.

---

3. Niech $\tilde{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych z przedziału [0,1]. Dane są następujące podprzestrzenie X_1, X_2, X_3, X_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$X_1 = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$,

$X_2 = X_1 \cup \{(-x, y) : (x,y) \in X_1\}$,

$X_3 = X_2 \setminus (\{1\} \times \tilde{Q})$,

$X_4 = X_2 \setminus (\{0\} \times \tilde{Q})$.

(a) Dla każdego $i \in \{1,2,3,4\}$ wyjaśnić, podając uzasadnienie, czy X_i jest spójne i czy jest zwarte.

(b) Wyjaśnić, podając uzasadnienie, czy przestrzenie X_1 i X_2 są homeomorficzne.

---

4. Niech $(C[0,1], d_{\text{sup}})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z odcinka euklidesowego $[0,1]$ w prostą euklidesową $(\mathbb{R}, d_e)$ z metryką supremum: $d_{\text{sup}}(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$.

Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zwartymi i brzegowymi podzbiorami prostej euklidesowej $\mathbb{R}$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i niech $\tilde{Q} \subset [0,1]$ będzie zbiorem liczb wymiernych z przedziału [0,1].

(a) Pokazać, że dla ustalonych $i \in N$ i $q \in [0,1]$ zbiór $D_{i,q} = \{f \in C[0,1] : f(q) \in A_i\}$ jest domknięty i brzegowy w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$.

(b) Pokazać, że zbiór funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takich, że $f(\tilde{Q}) \cap A = \emptyset$ jest gęsty w przestrzeni $(C[0,1], d_{\text{sup}})$.

EGZAMIN Z TOPOLOGII, 04.02.2010. TEORIA

1. (10 punktów) (a) Podać definicję ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(b) Podać dwa warunki równoważne ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y).

(c) Podać przykład różnowartościowego przekształcenia ciągłego $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, które nie jest homeomorfizmem.

2. (10 punktów) (a) Podać definicję zupełności przestrzeni metrycznej (X, d).

(b) Sformułować twierdzenie Baire'a.

(c) Podać przykład wskazujący, że w twierdzeniu Baire'a nie można opuścić założenia zupełności przestrzeni. Odpowiedź uzasadnić.

3. (10 punktów) (a) Podać definicję spójności przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$.

(b) Pokazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłym przekształceniem przestrzeni topologicznej spójnej $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójna.

4. (10 punktów) (a) Podać definicję zwartości przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$.

(b) Udowodnić, że zbiór zwarty w przestrzeni Hausdorffa jest w niej domknięty.

5. (10 punktów) (a) Podać definicję homotopii przekształceń ciągłych $f, g : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(b) Podać definicję przestrzeni ściągalnej. Podać przykład przekształcenia ciągłego przestrzeni ściągalnej na przestrzeń nieściągalną.

(c) Pokazać, że przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.