EGZAMIN Z TOPOLOGII I ZESTAW **A** 02.02.2011

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Odpowiedzi do zadań 2–4 należy uzasadnić 25 punktów za każde zadanie

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać swoje imię i nazwisko, numer zadania oraz literę oznaczającą zestaw.

---

1. Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q : q$ jest liczbą wymierną i $q \geq 0\}$, $\mathbb{P}$ będzie zbiorem liczb niewymiernych, zaś $C \subset [0,1]$ będzie standardowym zbiorem Cantora. Sprawdzić, czy poniższe podprzestrzenie płaszczyzny z metryką euklidesową

$$\begin{aligned}
A_1 &= (\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{R}) \cup ((-\infty, 0] \times \mathbb{P}) \cup ([0, +\infty) \times \{0\}), \\
A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < e^x\}, \\
A_3 &= (C \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in (0,1]\},
\end{aligned}$$

mają następujące własności (należy postawić w odpowiedniej rubryce $+$, jeśli zbiór ma daną własność, lub $-$, jeśli jej nie ma):

	A_1	A_2	A_3
A_i jest zwarta			
A_i jest zupełna w metryce d_e			
A_i jest metryzowalna w sposób zupełny			
A_i jest spójna			
A_i jest łukowo spójna			
A_i jest ściągalna			

2. Niech A będzie domkniętym i brzegowym podzbiorem prostej euklidesowej. $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych. Pokazać, że następujący zbiór

$$B = \left\{ t \in \mathbb{R} \colon \forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ \forall s \in A \quad \det \begin{pmatrix} 1 & q \\ t & s \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

jest gęstym podzbiorem prostej euklidesowej.

3. (A) Zbadać spójność i zwartość następujących podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0, \frac{1}{n}) \colon n = 1, 2, \ldots\}, \\
X_2 &= X_1 \cup \{(x,y) : (x,-y) \in X_1\}, \\
X_3 &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [0,\frac{1}{n}]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0, \frac{1}{n}) \colon n = 1, 2, \ldots\}, \\
X_4 &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\} \times [0,\frac{1}{n}]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0, q) \colon q \in \mathbb{Q}\},
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych.

(B) Pokazać, że żadne dwie spośród przestrzeni X_1, X_2, X_3, X_4 nie są homeomorficzne.

4. Niech $A = \{((-1)^n, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, \ldots\}$ i niech

$$
X = (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R} \times \{\frac{1}{n}\}) \ \cup \ A.
$$

(A) Wykazać, że podprzestrzeń X płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ jest spójna.

(B) Wykazać, że jeśli $h : X \to X$ jest homeomorfizmem, to $h(A) = A$ oraz $h(\mathbb{R} \times (-\infty, 0]) = \mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

EGZAMIN Z TOPOLOGII I TEORIA ZESTAW **A** 02.02.2011

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Uzasadnienie jest wymagane wyłącznie w poleceniu 14.
Punktacja: 11 punktów za polecenie 14, po 3 punkty za każde pozostałe polecenie.

---

1. Zdefiniować jednostajną ciągłość przekształcenia f przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y).
2. Podać przykład homeomorfizmu $h : (\mathbb{R}^2, d_e) \to (\mathbb{R}^2, d_e)$, który nie jest jednostajnie ciągły.
3. Podać definicję przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny.
4. Podać przykład podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$, która nie jest metryzowalna w sposób zupełny.
5. Podać definicję przestrzeni metrycznej (X, d) całkowicie ograniczonej.
6. Podać przykład przestrzeni metrycznej (X, d), która jest ograniczona, ale nie jest całkowicie ograniczona.
7. Podać definicję przestrzeni ośrodkowej.
8. Wskazać możliwy wybór przeliczalnej bazy w przestrzeni metrycznej ośrodkowej (X, d).
9. Podać definicje spójności przestrzeni topologicznej (X, τ).
10. Podać przykład przestrzeni spójnej, która nie jest łukowo spójna.
11. Podać definicję homotopii pętli α, β w przestrzeni topologicznej (X, τ), zaczepionych w punkcie $a \in X$.
12. Podać przykład podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, d_e)$, która jest łukowo spójna, ale nie jest ściągalna.
13. Sformułować twierdzenie Ascoliego-Arzeli.
14. Udowodnić, że iloczyn kartezjański $X \times Y$ przestrzeni topologicznych spójnych $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ jest spójny.