Topologia, Egzamin

2 luty 2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia i termin zajęć.
- numer rozwiązywanego zadania

Zadanie 1

Niech $S((x_1,x_2)),r)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie (x_1,x_2) i promieniu $r>0$ i niech

$$X_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}S((\frac{1}{n},0),\frac{1}{n}),\quad X_2=\bigcup_{n=1}^{\infty}S((0,0),\frac{1}{n})\cup\{(0,0)\},$$

$$X_3=\bigcup_{n=1}^{\infty}S((a_n,0),r_n)\cup\{(0,0)\},\quad X_4=\bigcup_{n=1}^{\infty}S((a_n,0),\frac{r_n}{2})\cup\{(0,0)\},$$

gdzie $r_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}),\quad a_n=\frac{1}{n}-r_n$ dla $n=1,2,...$ Dla każdej pary $i,j\neq i$ ustalić czy przestrzenie X_i oraz X_j są homeomorficzne. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2

Niech $X_1=\mathbb{Q}\times[0,1]$, $X_2=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]$, $X_3=\mathbb{N}\times[0,1]$, $X_4=\mathbb{N}\times(0,1)$ będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej, gdzie $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ oznaczają odpowiednio zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb wymiernych. Zbadać, które z przestrzeni X_1, X_2, X_3, X_4 są metryzowalne w sposób zupełny tj. są homeomorficzne z przestrzenią metryczną zupełną.

Zadanie 3

Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą i $f:X\to\mathbb{R}^3$ przekształceniem ciągłym w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^3$. Pokazać, że dla każdego punktu a przestrzeni $\mathbb{R}^3$, który nie należy do $f(X)$, istnieją liczby rzeczywiste $0<r<R$ takie, że $f(X)\subset B(a,R)\setminus B(a,r)$, gdzie $B(x,s)$ oznacza kulę otwarta o środku x i promieniu s.

Zadanie 4

Podzbiór A przestrzeni metrycznej X nazywamy $\varepsilon-$gęsty jeżeli kule otwarte o środkach w punktach należących do A oraz promieniu ε stanowią pokrycie przestrzeni X.

Wykazać, że jeżeli przestrzeń metryczna X dla każdego $\varepsilon>0$ zawiera spójny i $\varepsilon-$gęsty podzbiór X_ε, to jest spójna.

Czy jest prawdą, że jeżeli przestrzeń X dla każdego $\varepsilon>0$ zawiera łukowo spójny i $\varepsilon-$gęsty podzbiór X_ε, to jest łukowo spójna?

Zadanie 5

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z topologią, której bazą jest rodzina $\{[a,b)\}_{a<b,a\in\mathbb{R}}$ nazywa się strzałką. Zbadać, czy podprzestrzeń strzałki $[0,1]$ jest

(a) przestrzenią topologiczną zwartą.

(b) przestrzenią topologiczną spójną.