Egzamin z Topologii I Teoria Zestaw **A** 01.02.2012

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Uzasadnienie jest wymagane wyłącznie w poleceniu 14.
Punktacja: 11 punktów za polecenie 14, po 3 punkty za każde pozostałe polecenie.

---

1. Podać definicję otoczenia punktu x w przestrzeni topologicznej (X, τ).
2. Podać definicję ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń topologiczną (Y, τ_Y).
3. Podać dwa warunki równoważne ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y).
4. Podać przykład nieośrodkowej podprzestrzeni Y ośrodkowej przestrzeni topologicznej (X, τ).
5. Podać definicję topologii iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ przestrzeni topologicznych (X, τ_X) i (Y, τ_Y).
6. Podać przykład przestrzeni metrycznej (X, d), która jest metryzowalna w sposób zupełny, ale nie jest zupełna.
7. Podać definicję przestrzeni metrycznej (X, d) całkowicie ograniczonej.
8. Podać przykład homeomorfizmu $h : X \to Y$ przestrzeni metrycznej całkowicie ograniczonej (X, d_X) na przestrzeń metryczną (Y, d_Y), która nie jest całkowicie ograniczona.
9. Podać przykład spójnej przestrzeni topologicznej (X, τ_X), która nie posiada przeliczalnej bazy.
10. Podać przykład zwartej przestrzeni topologicznej (X, τ_X), która ma nieprzeliczalnie wiele składowych.
11. Podać przykład relacji równoważności $\sim$ na prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, \tau_e)$ takiej, ze przestrzeń ilorazowa $(\mathbb{R}/\sim, \tau_e/\sim)$ jest homeomorficzna z odcinkiem $[0, 1]$.
12. Podać definicję homotopii przekształceń ciągłych $f, g : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń topologiczną (Y, τ_Y).
13. Sformułować twierdzenie Banacha o punkcie stałym.
14. Udowodnić, że zwarty podzbiór A przestrzeni Hausdorffa (X, τ_X) jest w niej domknięty.

EGZAMIN Z TOPOLOGII I ZESTAW **A** 01.02.2012

Imię i nazwisko: nr indeksu:

Odpowiedzi do zadań 2–4 należy uzasadnić 25 punktów za każde zadanie
Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać swoje imię i nazwisko, numer zadania oraz literę oznaczającą zestaw.

---

1. Niech X_1 będzie następującą podprzestrzenią przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ z metryką „supremum" $d_1 = d_{sup}$:

$$X_1 = \{f \in C[0,1] : f(1) = 1 \text{ i } 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ dla każdego } x \in [0,1]\}.$$

Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q : q \text{ jest liczbą wymierną i } q \geq 0\}$ i niech X_2 będzie następującą podprzestrzenią płaszczyzny z metryką euklidesową $d_2 = d_e$:

$$X_2 = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} (\mathbb{R} \times \{q\}).$$

Niech $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ i niech X_3 będzie następującą podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z metryką euklidesową $d_3 = d_e$:

$$X_3 = (D^2 \setminus \{(0,0)\}) \times [0,1].$$

Sprawdzić, czy przestrzenie (X_i, d_i) mają następujące własności (należy postawić w odpowiedniej rubryce poniższej tabeli T, jeśli zbiór ma daną własność, lub N, jeśli jej nie ma):

	X_1	X_2	X_3
X_i jest zwarta			
X_i jest zupełna w metryce d_i			
X_i jest metryzowalna w sposób zupełny			
X_i jest spójna			
X_i jest łukowo spójna			
X_i jest ściągalna			

2. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych i niech $A_1, A_2, \ldots$ będą domkniętymi brzegowymi podzbiorami płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że istnieje punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ taki, że jego odległość (w metryce euklidesowej) od dowolnego punktu zbioru $\mathbb{Z}^2$ jest liczba niewymierną.

3. Niech $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} \ : \ t_i \in \{0,2\}$ dla $i = 1,2,\ldots\} \subset [0,1]$ będzie standardowym zbiorem Cantora. Rozważmy dwie relacje R i R' na zbiorze C:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ lub } x, y \in [0, \frac{1}{3}],$$
$$xR'y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ lub } |x - y| = \frac{2}{3}.$$

(A) Czy przestrzenie ilorazowe C/R i C/R' są homeomorficzne?

(B) Czy któraś z nich jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora?

4. Niech $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Które z przekształceń $f_i : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1,2,3,4$, zadanych następującymi wzorami

$$f_1(z) = z \quad f_2(z) = z^2 \quad f_3(z) = z^2 + 2012 \quad f_4(z) = 2012$$

są homotopijne? Należy wstawić T - tak lub N - nie w poniższej tabeli. **Tylko odpowiedzi dotyczące homotopijności przekształceń f_1 i f_3 oraz f_3 i f_4 wymagają uzasadnienia - proszę napisać je na tej kartce**.

Homotopijne	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	T			
f_2	X	T		
f_3	X	X	T	
f_4	X	X	X	T