

Analiza funkcjonalna - dodatkowe zadania

Zadanie 1. Zdefiniujmy przestrzeń c_{00} jako

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \text{istnieje } N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } x_n = 0 \text{ dla każdego } n > N\}.$$

Innymi słowy, c_{00} to przestrzeń ciągów które od pewnego momentu są równe zero. Pokazać, że:

- (a) c_{00} jest przestrzenią liniową oraz wyposażona w normę ℓ_p (dla $1 \leq p \leq \infty$) jest przestrzenią unormowaną;
- (b) c_{00} jest gęstą podprzestrzenią ℓ_p dla $1 \leq p < \infty$ (z normą ℓ_p);
- (c) c_{00} jest gęstą podprzestrzenią c_0 (z normą supremum);
- (d) c_{00} nie jest zupełna jako podprzestrzeń ℓ_p ani c_0 ;
- (e) Czy c_{00} jest gęstą podprzestrzenią ℓ_{∞} ?

Zadanie 2. Wykazać, że kule w przestrzeni unormowanej są wypukłe.

Zadanie 3. Wykazać, że $C(K)$ wyposażona w normę supremum jest przestrzenią Banacha (K - zbiór zwarty).

Zadanie 4. Wykazać, że $C_b(X)$ wyposażona w normę supremum jest przestrzenią Banacha (X - przestrzeń topologiczna).

Zadanie 5. Czy przestrzeń $C^1[0, 1]$ wyposażona w normy

- (a) $\|f\|_{\infty}$;
- (b) $\int_0^1 |f| dx$;
- (c) $\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$

jest przestrzenią Banacha?

Zadanie 6. Wykazać nierówność Höldera.

Zadanie 7. Wykazać nierówność Minkowskiego.

Zadanie 8. Pokazać, że kula jednostkowa w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha nie może być zwarta (wskazówka: użyć lematu Riesz).

Zadanie 9. Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Pokazać, że jeśli $K \subset X$ jest zwarty, to K ma puste wnętrze.

Zadanie 10. Niech $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ będzie zadane wzorem $(Tf)(x) = xf(x)$. Znaleźć normę operatora T .

Zadanie 11. Pokazać, że wszystkie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej są równoważne.

Zadanie 12. Załóżmy, że M jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X . Pokazać, że M jest domkniętym podzbiorem X .

Zadanie 13. Pokazać, że ℓ_p jest przestrzenią Hilberta tylko dla $p = 2$ (wskazówka: reguła równoległoboku).

Zadanie 14. Pokazać, że $L^p(0, 1)$ jest przestrzenią Hilberta tylko dla $p = 2$.

Zadanie 15. Pokazać, że $C[0, 1]$ nie jest przestrzenią Hilberta.

Zadanie 16. Znaleźć $(c_{00})^\perp$ w ℓ_2 .

Zadanie 17. Znaleźć podprzestrzeń $M \subset \ell_2$ taką, że $(M^\perp)^\perp \neq M$.

Zadanie 18. Znaleźć ortogonalizację układu wektorów $\{1, t, t^2\}$ w $L^2(-1, 1)$.

Zadanie 19. Znaleźć wielomian $w(t)$, który minimalizuje wartość całki

$$\int_{-1}^1 |t^4 - w(t)|^2 dt$$

w przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej 2.