

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 16.01.2026

Zadanie 1. Pokazać domkniętość obrazu $T - \lambda I$ z zadania 5 z poprzedniej serii. Dokładniej, zauważyliśmy, że wystarczy pokazać ją dla $I - T$; dalej należy uzupełnić szczegóły w poniższym rozumowaniu.

- (a) Zauważyć, że $\ker(I - T)$ jest skończenie wymiarowe;
- (b) Niech $f_n = (I - T)u_n \in \operatorname{im}(I - T)$ będzie ciągiem zbieżnym w X . Pokazać, że istnieje $v_n \in \ker(I - T)$ takie, że

$$d_n := \operatorname{dist}(u_n, \ker(I - T)) = \|u_n - v_n\|;$$

- (c) Załóżmy, że d_n nie jest ograniczony. Użyć faktu, że

$$f_n = (I - T)u_n = (I - T)(u_n - v_n) \quad (*)$$

i zbieżności ciągu f_n aby otrzymać, że ciąg $w_n = \frac{u_n - v_n}{d_n}$ jest zbieżny do pewnego elementu $\ker(I - T)$;

- (d) Z (c) i faktu, że $v_n \in \ker(I - T)$ wywnioskować, że ciąg d_n jest ograniczony;
- (e) Z ograniczoności d_n i zwartości T wynika, że $T(u_n - v_n)$ ma podciąg zbieżny. Wywnioskować z (*), że $\operatorname{im}(I - T)$ jest domknięty.

Zadanie 2. Niech $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ będzie operatorem przesunięcia w prawo, tzn.

$$T((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Znaleźć $\sigma(T)$ oraz zbiór wszystkich wartości własnych T .

Zadanie 3. Niech $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ będzie operatorem przesunięcia w lewo, tzn.

$$T((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, \dots).$$

Znaleźć $\sigma(T)$ oraz zbiór wszystkich wartości własnych T .

Zadanie 4. Niech $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ będzie operatorem postaci

$$T((x_n)) = (\lambda_n x_n)$$

dla pewnego ograniczonego ciągu λ_n . Znaleźć $\sigma(T)$ oraz zbiór wszystkich wartości własnych T .

Zadanie 5. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie operatorem zwartym. Pokazać, że jeśli $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, to λ jest wartością własną.

Zadanie 6. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie operatorem zwartym. Pokazać, że dla każdego $r > 0$ zbiór

$$\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > r\}$$

jest skończony. W szczególności, $\sigma(T)$ jest co najwyżej przeliczalny i jego jedynym możliwym punktem skupienia jest 0.

Zadanie 7. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie rzutem, tzn. operatorem ograniczonym takim, że $T^2 = T$. Pokazać, że $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$. Czy są to wartości własne?