

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 09.01.2026

Zadanie 1. Niech $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ będzie operatorem Volterry, tzn.

$$Tf(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Pokazać, że T jest ciągły i wyznaczyć T^* . Czy T jest zwarty?

Zadanie 2. Niech $p \in [1, \infty)$. Zdefiniujmy operator $T : L^p(0, 1) \rightarrow L^p(0, 1)$ wzorem

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

dla pewnej funkcji mierzalnej $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$. W przypadku, gdy:

- (a) $K \in C([0, 1]^2)$;
- (b) $K \in L^\infty([0, 1]^2)$;
- (c) $p = 2$ i $K \in L^2([0, 1]^2)$

sprawdzić, czy T jest zwarty, czy jest odwracalny i wyznaczyć T^* .

Zadanie 3. Niech $p \in [1, \infty)$ i $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell_p$ (jedynka na n -tym miejscu). Pokazać, że operator ciągły $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ taki, że

$$Te_n = a_n e_n$$

jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \rightarrow 0$.

Zadanie 4. Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że operator zwarty $T : X \rightarrow X$ przekształca ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie. Pokazać, że:

- (a) Istnieje operator niezzwarty o takiej własności;
- (b) Jeśli X jest refleksywna i ośrodkowa, to każdy operator ciągły $T : X \rightarrow X$ o takiej własności jest zwarty.

Zadanie 5. Załóżmy, że $T : X \rightarrow X$ jest operatorem zwartym oraz $\lambda \neq 0$. Pokazać, że obraz operatora $T - \lambda I$ jest domknięty. Ponadto udowodnić, że $T - \lambda I$ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest na.

Zadanie 6. Niech $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ będzie operatorem liniowym zadany wzorem

$$T((x_n)) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right).$$

Pokazać, że dla c_{00} nie zachodzi twierdzenie o odwzorowaniu otwartym: T jest ograniczony, różnowartościowy i na, ale T^{-1} nie jest ciągły.