

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 19.12.2025

Zadanie 1. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Załóżmy, że $T : H \rightarrow H$ jest operatorem liniowym. Pokazać, że jeśli

$$(1) \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{dla wszystkich } x, y \in H$$

to T jest ciągły.

Operator T spełniający (1) nazywamy *symetrycznym*. Jeśli dodatkowo zachodzi $D(T) = D(T^*)$, to mówimy że jest *samosprzężony*.

Zadanie 2. Pokazać, że operator $T : C_c^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ zadany wzorem

$$T(f)(x) = -\frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}x^2f(x)$$

jest symetryczny. Pokazać, że nie jest on operatorem ograniczonym i sprawdzić, że nie da się go zdefiniować na całym $L^2(\mathbb{R})$ (podpowiedź: na co przechodzi $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$?).

Zadanie 3. Załóżmy, że $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ jest liniowym, ciągłym i różnowartościowym operatorem. Pokazać, że $T(\ell_1)$ nie jest domkniętą podprzestrzenią ℓ_2 .

Zadanie 4. Udowodnić, że ciąg funkcji z układu Rademachera

$$f_n(x) = \text{sign}(\sin(2^n \pi x))$$

zbiega słabo do zera w $L^2(0, 1)$.

Zadanie 5. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Załóżmy, że $x_n \rightharpoonup x$ słabo w H . Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

- (a) $x_n \rightarrow x$ w normie;
- (b) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Zadanie 6. Pokazać, że ciąg $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell_1$ (z jedynką na n -tym miejscu) zbiega słabo*, ale nie zbiega słabo.

Zadanie 7. Pokazać, że ciąg $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty$ (jedynki na n pierwszych miejscach) zbiega słabo*, ale nie zbiega słabo.