

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 05.12.2025

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Przypomnijmy, że operatorem sprzężonym do $T \in \mathcal{B}(H)$ nazywamy (jedyne) operator liniowy $T^* \in \mathcal{B}(H)$ spełniający

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{dla wszystkich } x, y \in H.$$

Zadanie 1. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$. Pokazać, że:

- (a) $\ker(T)$ jest podprzestrzenią domkniętą;
- (b) Zachodzi

$$H = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{im}(T^*)}.$$

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Przypomnijmy, że $T \in \mathcal{B}(H)$ nazywamy operatorem Hilberta-Schmidta, jeśli dla pewnej (równoważnie: każdej) bazy ortonormalnej $(e_n)_{n=1}^\infty$ w H zachodzi warunek:

$$\|T\|_{HS}^2 := \sum_{n=1}^\infty \|T(e_n)\|^2 < \infty.$$

Zadanie 2. Niech $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną. Pokazać, że operator całkowy T_K zadany wzorem

$$(T_K f)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy, \quad \text{dla } f \in L^2(\Omega)$$

jest operatorem Hilberta-Schmidta (na przestrzeni $L^2(\Omega)$) wtedy i tylko wtedy gdy $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Ponadto

$$\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha. Wykazać, że jeśli X^* jest ośrodkowa, to X też jest ośrodkowa. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

Zadanie 4. Załóżmy, że X jest refleksywną przestrzenią Banacha. Jeśli X jest ośrodkowa, to X^* także jest ośrodkowa.

Zadanie 5. Wykazać, że $L^1[0, 1]$ nie jest przestrzenią refleksywną:

- (a) Pokazać, że przestrzeń dualna do $L^1[0, 1]$ to $L^\infty[0, 1]$;
- (b) Pokazać, że funkcjonal ewaluacji w punkcie

$$e_x(f) := f(x)$$

jest funkcjonalem liniowym ciągłym na $C[0, 1]$ o normie 1;

- (c) Pokazać, że jeśli $e : L^\infty[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolnym przedłużeniem e_x na przestrzeń $L^\infty[0, 1]$ o normie 1 (np. z Hahna-Banacha), to nie istnieje funkcja $g \in L^1[0, 1]$ taka że

$$e(f) = \int_0^1 fg dt;$$

- (d) Wywnioskować, że przestrzeń dualna do $L^\infty[0, 1]$ ściśle zawiera $L^1[0, 1]$.

Zadanie 6. Niech A, B będą niepustymi, rozłącznymi i wypukłymi podzbiorami przestrzeni Banacha X . Pokazać, że jeśli A jest domknięty a B zwarty, to istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ rozdzielający je, tzn. $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x)$.