

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 21.11.2025

Zadanie 1. Wykazać, że układ Rademachera

$$f_n(x) = \text{sign}(\sin(2^n \pi x))$$

jest układem ortogonalnym w $L^2(0, 1)$. Czy jest to układ zupełny?

Zadanie 2. Wykazać, że wielomiany Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

tworzą układ ortogonalny w $L^2(-1, 1)$. Czy jest to układ zupełny?

Zadanie 3. Wykazać, że wielomiany Laguerre'a

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

tworzą układ ortogonalny w $L^2((0, +\infty), e^{-t} dt)$. Czy jest to układ zupełny?

Zadanie 4. Niech

$$M = \{f \in L^2(-1, 1) : f(x) = f(-x)\}.$$

- (a) Znaleźć przestrzeń $M^\perp$;
- (b) Znaleźć wzór na rzut ortogonalny na M .

Zadanie 5. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Załóżmy, że $T \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem liniowym takim, że

$$\langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2$$

dla każdego $x \in H$.

- (a) Pokazać, że T jest izomorfizmem (tzn. jest bijekcją i $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$);
- (b) Czy T jest izometrią?

Zadanie 6. Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Wykazać, że

$$H/M \simeq M^\perp.$$

Zadanie 7. Pokazać, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha X zanurza się izometrycznie w l_∞ .