

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 23.01.2026

Definicja. W całej poniższej serii niech H będzie (zespoloną) przestrzenią Hilberta i niech $T : H \rightarrow H$ będzie operatorem liniowym. Przez T^h oznaczamy jego sprzężenie hilbertowskie (lub hermitowskie), tzn. jedyny operator spełniający

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^h y \rangle$$

dla każdych $x, y \in H$. Mówimy, że T jest: normalny, jeśli T^h i T są przemienne; samosprężony, jeśli $T = T^h$; dodatni, jeśli $T = T^h$ i $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ dla każdego $x \in H$; unitarny, jeśli $T^{-1} = T^h$.

Zadanie 1. Niech $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ będzie zadany wzorem

$$Tf(x) = \text{sign}(x)f(x+1).$$

Wyznaczyć T^h . Czy T jest samosprężony/dodatni/unitarny/normalny?

Zadanie 2. Pokazać, że jeśli dla każdego $x \in H$ zachodzi $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, to T jest samosprężony.

Zadanie 3. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem normalnym. Pokazać odwrotne implikacje do tych z poprzednich ćwiczeń, tzn.:

- (a) Jeśli $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, to T jest samosprężony;
- (b) Jeśli $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, to T jest dodatni;
- (c) Jeśli $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, to T jest unitarny.

Zadanie 4. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem normalnym. Pokazać, że dla $\lambda \neq \mu$

$$\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I),$$

zatem podprzestrzenie odpowiadające różnym wartościom własnym są wzajemnie ortogonalne.

Zadanie 5. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem normalnym. Pokazać, że:

- (a) $\|T^h x\| = \|Tx\|$ dla każdego $x \in H$;
- (b) $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^h - \bar{\lambda} I)$;
- (c) $\|T^2\| = \|T\|^2$;
- (d) Jeśli $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} > 0$, to T jest odwracalny.

Zadanie 6. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$. Liczbę

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

nazywamy *promieniem spektralnym* operatora T .

- (1) Pokazać, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq r(T) \leq \|T\|;$$

- (2) Wywnioskować, że jeśli T jest normalny, to $r(T) = \|T\|$.

Zadanie 7. Niech $T \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem nieujemnym. Pokazać, że istnieje nieujemny operator S (oznaczany też $\sqrt{T}$) taki, że $S^2 = T$.