Macierze zmiany bazy

Definicja macierzy przekształcenia Przedstawiam tu krótkie wprowadzenie do macierzy zmiany bazy, tudzież macierzy przekształceń liniowych w zadanych bazach. Wszystko będę robił zakładając, że ciało nad którym pracujemy to $K = \mathbb{R}$.

Macierz przekształcenia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ w bazach $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ oraz $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ to

$$M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi

$$f(u_i) = a_{1,i} \cdot v_1 + a_{2,i} \cdot v_2 + \ldots + a_{m,1} \cdot v_m.$$

Innymi słowy dla każdego i bierzemy $f(u_i)$, czyli funkcję od i-tego wektora bazy $\mathcal{U}$. Jako, że $f(u_i) \in \mathbb{R}^m$, to da się on zapisać jako kombinacja wektorów z bazy $\mathcal{V}$. Współczynniki przy tej kombinacji liniowej zapisujemy w i-tej kolumnie macierzy $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f)$.

Definicja macierzy zmiany bazy Macierz zmiany bazy definiujemy tylko wtedy, gdy dwie bazy, powiedzmy $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ są bazami tej samej przestrzeni, w tym wypadku $\mathbb{R}^n$. Jest ona zdefiniowana dokładnie tak samo jak macierz przekształcenia w bazach $\mathcal{U}$ i $\mathcal{W}$, tyle, że w kolumnach macierzy przestawiamy nie $f(u_i)$ jako kombinację liniową wektorów z $\mathcal{W}$, a same wektory u_i jako kombinację liniową wektorów z $\mathcal{W}$. Dlatego też wygodnie jest myśleć o macierzy zmiany bazy jako o macierzy przekształcenia identycznościowego. Będziemy zatem odtąd macierz zmiany bazy z $\mathcal{U}$ na $\mathcal{W}$ pisać jako $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id)$.

Proste zastosowanie Wyobraźmy sobie następujące zadanie. Mamy dwie bazy $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wektor $v \in \mathbb{R}^n$. Znamy przedstawienie v w bazie $\mathcal{U}$, konkretnie wiemy, że

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n.$$

Chcemy natomiast obliczyć przedstawienie v w bazie $\mathcal{W}$, to znaczy interesują nas liczby $b_1, \ldots, b_n$ takie, że

$$v = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n.$$

Jak sama nazwa wskazuje posłuży nam do tego macierz zmiany bazy z bazy $\mathcal{U}$ na bazę $\mathcal{W}$. Konkretnie pokażemy, że

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T.$$

Innymi słowy chcąc otrzymać wektor współczynników w bazie $\mathcal{W}$ bierzemy wektor współczynników w bazie $\mathcal{U}$ i mnożymy w lewej przez macierz zmiany bazy z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{W}$.

Przeliczmy zatem, że owszem jest to prawda. Wiemy, że

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

oraz, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$u_i = a_{1,i}w_1 + \ldots + a_{n,i}w_n,$$

gdzie $a_{i,j}$ to liczba w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id)$. Korzystając z tego piszemy

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_iu_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}w_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ia_{j,i}w_j = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} a_ia_{j,i}.$$

Widzimy zatem, że współczynniki b_j powinny spełniać równanie

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_ia_{j,i}.$$

To jest jednak dokładnie to, co otrzymamy stosując równość $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, co kończy dowód.

Obraz wektora W analogiczny sposób można korzystać z macierzy przekształcenia. Niech $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f)$ to macierz przekształcenia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ w bazach $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ oraz $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Wówczas jeżeli

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

to

$$f(v) = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mw_m,$$

gdzie $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(f) \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$. Uzasadnienie jest dokładnie analogiczne jak powyżej, dobrym ćwiczeniem jest przeliczyć to sobie samemu.

Macierz odwrotna Naturalnym pytaniem jest: jak się ma macierz $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id)$ zmiany bazy z $\mathcal{U}$ na $\mathcal{W}$ do macierzy $M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id)$ zmiany bazy z $\mathcal{W}$ na $\mathcal{U}$. Okazuje się, że są swoimi odwrotnościami, co nietrudno pokazać.

Niech bowiem

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

Jak pokazaliśmy wcześniej $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) \cdot (a_1, \ldots, a_n)^T$ to wektor współczynników v w bazie $\mathcal{W}$. Możemy teraz jednak z powrotem zamienić bazę na $\mathcal{U}$ mnożąc z lewej przez $M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id)$. Otrzymamy wówczas, że $M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) \cdot (a_1, \ldots, a_n)^T$ to współczynniki wektora v w bazie $\mathcal{U}$, czyli $(a_1, \ldots, a_n)^T$. Zatem

$$M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) \cdot (a_1, \ldots, a_n)^T = (a_1, \ldots, a_n)^T,$$

dla dowolnego wektora $(a_1, \ldots, a_n)^T$ co daje

$$M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id) = I,$$

a tym samym

$$M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(Id) = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(Id)^{-1}.$$

Macierz przekształcenia w innych bazach Ostatnim problemem, z którym się zmierzymy jest następujący. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest opisana przez macierz $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f)$, gdzie $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ oraz $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Chcemy natomiast policzyć $M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'}(f)$, gdzie $\mathcal{U}' = \{u_1', \ldots, u_n'\}$ i $\mathcal{V}' = \{v_1', \ldots, v_m'\}$ to inne bazy odpowiednio $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Pokażemy, że zachodzi

$$M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'}(f) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f) \cdot M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}(Id).$$

Niech wektor $w \in \mathbb{R}^n$ przedstawia się w bazie $\mathcal{U}'$ następująco:

$$w = a_1 u_1' + a_2 u_2' + \ldots + a_n u_n'.$$

Pokażemy, że dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$ przemnożenie wektora $(a_1, \ldots, a_n)^T$ z lewej przez macierz $M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'}(f)$ da ten sam wynik co przemnożenie go z lewej przez macierz $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f) \cdot M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}(Id)$. Naturalnie pokaże to równość obu macierzy.

Gdy przemnożymy $(a_1, \ldots, a_n)^T$ przez $M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'}(f)$ to otrzymamy wektor $(b_1, \ldots, b_m)^T$ taki, że

$$f(w) = b_1 v_1' + b_2 v_2' + \ldots + b_m v_m',$$

czyli przedstawienie $f(w)$ w bazie $\mathcal{V}'$. Prześledźmy teraz co otrzymamy mnożąc $(a_1, \ldots, a_n)^T$ z lewej przez $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(Id) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f) \cdot M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}(Id)$. Wykonamy to po kolei mnożąc kolejno przez $M_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}(Id)$, $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f)$ i $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(Id)$. Po wymnożeniu przez $M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}(Id)$ zmienimy bazę na $\mathcal{U}$, czyli otrzymamy współczynniki wektora w w bazie $\mathcal{U}$. Po wymnożeniu przez $M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(f)$ uzyskamy współczynniki wektora $f(w)$ w bazie $\mathcal{W}$, jako, że poprzednio mieliśmy współczynniki wektora w w bazie $\mathcal{U}$. Na samym końcu, wymnażając z lewej przez $M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}$ zamienimy bazę na $\mathcal{V}'$, czyli otrzymamy współczynniki $f(w)$ w bazie $\mathcal{V}'$, a zatem to, czego oczekiwaliśmy. Tym samym dowód został zakończony.

Przykład Jeśli ktoś nie przerabiał jeszcze zagadnienia własnego, to niech nie przejmuje się tym przykładem.

Rozważmy następujące zadanie: dana macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

znaleźć podobną do niej macierz C w postaci Jordana oraz macierz B taką, że $A = BCB^{-1}$.

Łatwo można policzyć wielomian charakterystyczny, który wynosi $(x-1)(x-3)+1 = (x-2)^2$, zatem jedyna wartość własna przekształcenia zdefiniowanego przez A to 2. Mamy $\dim(im(A-2\cdot I)) = 1$, więc $\dim(ker(A-2\cdot I)) = 1$, więc macierz C będzie posiadała dokładnie jedną klatkę Jordana, co znaczy, że

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Możemy interpretować macierz A jako macierz pewnego przekształcenia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazie standardowej $\mathcal{U} = \{e_1, e_2\}$. Wówczas C jest macierzą tego samego przekształcenia z pewnej bazie $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ będącej bazą Jordana. Zauważmy, że $A = M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(f)$, $C = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)$, więc

$$A = M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(Id) \cdot C \cdot M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(Id).$$

Można zatem wziąć $B = M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(Id)$, aby je obliczyć wystarczy znać bazę V. Liczymy więc v_1 i v_2, otrzymujemy przykładowo $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (0, 1)$. Dostajemy ostatecznie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$