Zestaw zadań

Przykładowe zadania, które powinno się umieć zrobić chcąc otrzymać ocenę 3.

1. (wyrażenia regularne) Pokaż, że dowolne języki L i M spełniają

$$(L^* M^*)^* = (L \cup M)^*.$$

2. (wyrażenia regularne) Pokaż, że wyrażenie regularne

$$\big(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10)\big)^*$$

generuje dokładnie słowa nad alfabetem $\{0, 1\}$, w których zarówno 0 jak i 1 występuje parzyście wiele razy.

3. (lemat o pompowaniu / relacja Myhilla-Neroda) Pokaż, że następujące języki nie są regularne:

- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{a^m b^n \mid n \neq m\}$;
- palindromy nad $\{a, b\}$.

4. (własności domknięcia) Pokaż, że jeśli $K, L \subseteq \Sigma^*$ są regularne, to również

- $K \cap L$, $K \cup L$, $\bar{K}$;
- K^R (odwrócenie);
- $K \,||\, L$ (przeplot);
- $\sqrt{K} = \{w \mid ww \in K\}$.

są regularne.

5. (relacja Myhilla-Neroda, automaty minimalne) Niech $L = \{a^i b^n a^j \mid n > 0, i + j \text{ jest parzyste}\}$. Ile klas abstrakcji ma relacja $\equiv_L$? Ile stanów ma minimalny automat rozpoznający język L?

6. (kombinatoryka automatów) Czy dla każdego automatu niedeterministycznego A istnieje automat deterministyczny B taki, że $L(A) = L(B)$? Podaj przykład A o n stanach takiego, żeby minimalny taki B miał wykładniczo wiele stanów (w stosunku do n). Pokaż, że B zawsze może mieć co najwyżej 2^n stanów.

6. (algorytmy dla automatów) Dany automat niedeterministyczny A oraz słowo w. Zaprojektuj algorytm wielomianowy, sprawdzający, czy $w \in L(A)$.

7. (gramatyki bezkontekstowe) Skonstruuj gramatyki bezkontekstowe dla następujących języków:

- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- palindromy nad alfabetem $\{a, b\}$;
- słowa nad $\{a, b\}$ nie będące palindromami;
- słowa nad $\{a, b\}$ o równej liczbie liter a i b;
- dopełnienie języka $\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.

8. (lemat o pompowaniu) Pokaż, że następujące języki nie są bezkontekstowe:

- $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$;
- $\{a^i b^j c^k d^\ell \mid i = k \wedge j = \ell\}$.

9. (automaty ze stosem) Skonstruuj automaty ze stosem akceptujące języki z zadania 7.

10. (własności domknięcia) Pokaż, że jeśli języki $K, L \subseteq \Sigma^*$, są bezkontekstowe, a $R \subseteq \Sigma^*$ jest regularny, to również następujące języki są bezkontekstowe:

- $K \cdot L^R$;
- $\text{Prefix}(L) = \{w \mid \exists_v wv \in L\}$;
- $K \cap R, K \cup R$;
- $\text{Infix}(L) = \{w \mid \exists_{u,v} uwv \in L\}$.

11. (maszyny Turinga) Skonstruuj maszynę Turinga, które rozpoznaje język

- $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$;
- palindromów.

12. (nierozstrzygalność) Pokaż, że następujące problemy są nierozstrzygalne:

- dana gramatyka bezkontekstowa G, czy $L(G)$ zawiera wszystkie słowa długości parzystej?
- dana maszyna Turinga M, czy $L(M)$ jest skończony?

13. (NP-zupełność) Pokaż, że następujące problemy są NP-zupełne:

- dany graf G i liczba $k \in \mathbb{N}$, czy G zawiera klikę wielkości k jako podgraf?
- dane dwie formuły zdaniowe ϕ i ψ w postaci CNF, czy $\phi \vee \psi$ jest spełnialna?