

## Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

### Zadania przygotowawcze przed egzaminem

Jak poprzednio, po zrobieniu zadań nie należy uważać się na super przygotowanego.

1. Oto bardzo uproszczony model rozwoju kolonii bakterii. Każde z pól kwadratowej planszy  $2 \times 2$  może być puste bądź zawierać jedną bakterię. Co sekundę dla wszystkich pól jednocześnie

- pole, na którym jest bakteria staje się z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  puste
- na polu, które aktualnie jest puste i sąsiaduje (krawędzią) z co najmniej jednym polem zawierającym bakterię z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  pojawia się bakteria

Oblicz oczekiwany czas życia kolonii oraz prawdopodobieństwo tego, że kolonia kiedykolwiek będzie liczyć dokładnie cztery bakterie.

2. Próba  $X_1, \dots, X_n$  pochodzi z rozkładu Poissona o nieznanym parametrze  $\lambda$ . Znaleźć estymator największej wiarygodności dla  $\lambda$  oraz dla  $e^{\lambda^2}$ .

3. Cztery mrówki początkowo znajdują się w jednym wierzchołku czworościanu. Co sekundę każda z nich, niezależnie od pozostałych, z jednakowym prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  przechodzi do któregoś z sąsiednich wierzchołków lub pozostaje w tym samym. Niech  $X$  oznacza liczbę wierzchołków zajmowanych przez mrówki po upływie jednej sekundy,  $Y$  zaś czas, po którym po raz pierwszy wszystkie wierzchołki będą zajęte. Oblicz  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}Y$ .

4. Jest  $n$  osób:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Osoba  $A_1$  dostaje kartkę ze znakiem  $+$ . Z prawdopodobieństwem  $p$ ,  $0 < p < 1$  zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie  $A_2$ , która z prawdopodobieństwem  $p$  zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie  $A_3$ , itd. Na zakończenie, po oddaniu kartki przez osobę  $A_n$  zaobserwowano znak  $+$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba  $A_1$  nie zmieniła znaku?

5. Na przyjęcie przy okrągłym stole liczącym  $4n$  miejsc przyszło  $2n$  pań i  $2n$  panów. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję liczby par siedzących obok siebie. Oszacuj jak najlepiej prawdopodobieństwo, że par tych będzie nie mniej niż  $3n$  oraz prawdopodobieństwo, że par tych będzie nie więcej niż  $n$ .