

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadania przygotowawcze przed kolokwium - seria II

Zadania w tej serii są nieco trudniejsze niż w poprzedniej.

1. Klasa liczy 30 uczniów, każdy urodzony w tym samym roku, który to rok ma 366 dni. Oszacować jak najlepiej prawdopodobieństwo, że osób, które nie mają towarzystwa (tzn urodzonego tego samego dnia) jest nie większa niż 20. (to nie jest zadanie zupełnie banalne, ale wg mnie warto je zrobić, nie jest też jakoś bardzo trudne)
2. Rzucamy monetą do momentu wypadnięcia drugiego orła. Wykaż, że przy założeniu, że ten drugi orzeł wypada w n -tym rzucie, prawdopodobieństwo wypadnięcia pierwszego orła w i -tym rzucie jest jednakowe dla wszystkich i spełniających $1 \leq i \leq n - 1$.
3. Pokazać, że skończona rodzina zdarzeń niezależnych, każde o prawdopodobieństwie mniejszym niż 1 nie może pokrywać całej Ω . Czy tak samo jest dla rodziny nieskończonej?
4. Podać przykład rozkładu dyskretnego takiego, że nie ma on wartości oczekiwanej (to znaczy ma ją nieskończoną). Innymi słowy podać taki ciąg p_0, p_1, p_2, \dots , by $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} np_n = \infty$.
5. Podać przykład rozkładu dyskretnego takiego, że ma on wartość oczekiwaną, ale nie ma wariancji.
6. W jednej urnie są 2 czerwone kule i 1 czarna, w drugiej urnie jest 101 czerwonych i 100 czarnych. Ktoś losuje urnę (nie wiemy którą), z tej urny losuje kulę i mówi nam jakiego jest ona koloru. Następnie z tej samej urny losowana jest druga kula (przy czym możemy zażądać, by wcześniej wylosowana kula wróciła do urny) i również jej kolor jest nam podawany. Naszym zadaniem jest zgadnąć, z której urny losowane są kule. Jaka jest nasza najlepsza strategia?
7. Mamy algorytm randomizowany, który oblicza interesującą nas wartość. Wartość oczekiwana wyniku w poszczególnym zapuszczeniu programu to μ , a jego odchylenie standardowe to σ . Chcemy otrzymać z dużym prawdopodobieństwem p bliskim zero wynik w przedziale $(\mu - \delta, \mu + \delta)$. Ile razy należy zapuścić algorytm, żeby uśrednienie wyników uzyskanych w kolejnych zapuszczeniach programu było z prawdopodobieństwem przynajmniej p w tym przedziale?