

Zadania przygotowawcze do egzaminu z MD

Zadania z sieci: <http://smurf.mimuw.edu.pl/node/1034>

1. Niech p będzie liczbą pierwszą, a J_p to liczba złożona z p jedynek. Pokaż, że jeśli p dzieli J_p , to $p = 3$.

2. Oblicz ile jest różnych sześcianów, w których każdy z wierzchołków jest pokolorowany na czerwono, zielono lub niebiesko takich, że przeciwległe wierzchołki kolorujemy tym samym kolorem. Utożsamiamy sześciany, które różnią się tylko obrotem.

3. Niech $f(n) = x$, gdzie $x^x = n$. Oblicz rząd funkcji f .

4. Czy istnieje graf, który posiada:

- dokładnie 6 cykli Hamiltona?
- dokładnie 6 cykli Eulera?
- dokładnie 3 cykle Hamiltona?
- dokładnie 3 cykle Eulera?

5. Ile jest kolorowań grafu C_7 (cykl o 7 wierzchołkach) na 3 kolory takich, że żadne trzy sąsiednie wierzchołki nie są tego samego koloru?

6. Ile maksymalnie krawędzi może mieć nieskierowany graf o $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ wierzchołkach, taki, że nie zawiera trójkątów (tzn. trójek wierzchołków u, v, w parami połączonych krawędzią)? Znajdź jak najlepsze oszacowania dolne i górne.

7. Oblicz sumę

$$\sum_{i,j} ij \binom{2n}{i} \binom{2n}{j} \binom{2n}{3n-i-j}.$$

8. Znajdź wszystkie rozwiązania w $k, l \in \mathbb{N}$ układu kongruencji:

$$k^2 + l^2 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$k^3 + l^3 \equiv 0 \pmod{17}.$$

9. Rozwiąż w liczbach całkowitych $n^2 \equiv n - 2 \pmod{49}$.