Podstawy Matematyki - rozwiązania zadań

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Rozwiązanie
Najpierw pokażemy, że

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Niech $x \in A \cap (B \cup C)$. Wówczas $x \in A$ oraz $x \in B \cup C$. Rozważmy dwa przypadki: $x \in B$ i $x \in C$.

Przypadek I: $x \in B$
Wówczas $x \in A$ i $x \in B$, czyli $x \in A \cap B$. A zatem $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Przypadek II: $x \in C$
Wówczas $x \in A$ i $x \in C$, czyli $x \in A \cap C$. A zatem $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Teraz pokażemy, że

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Niech $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Rozważmy dwa przypadki: $x \in A \cap B$ i $x \in A \cap C$.

Przypadek I: $x \in A \cap B$
Wtedy $x \in A$ i $x \in B$. A więc również $x \in B \cup C$. Zatem $x \in A \cap (B \cup C)$.

Przypadek II: $x \in A \cap C$
Wtedy $x \in A$ i $x \in C$. A więc również $x \in B \cup C$. Zatem $x \in A \cap (B \cup C)$.

Zadanie 2.
Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zachodzi równość

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

gdzie $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie
Aby udowodnić równość pokażemy dwie inkluzje.

Najpierw pokażemy, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Niech $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Wówczas $x \in B_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. A więc $x \in A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i$, czyli $x \in A_k$. Zatem również $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Teraz pokażemy, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Niech $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wówczas $x \in A_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, bez straty ogólności przyjmijmy, że k jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $x \in A_k$. Wówczas $x \notin \bigcup_{i<k}$. Zatem $x \in B_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i$, a więc również $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Zadanie 3.
Niech $f : A \to B$. Udowodnij, że f jest na B wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : B \to C$ zachodzi implikacja $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow g = h$.

Rozwiązanie
Najpierw udowodnimy implikację w prawo. Załóżmy, że f jest na B, pokażemy, że zachodzi implikacja $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$. Weźmy pewne $g, h : B \to C$ takie, że $g \circ f = h \circ f$. Niech $b \in B$ dowolny oraz $g(b) = c$, pokażemy, że wówczas również $h(b) = c$. Ponieważ f jest na B, to istnieje $a \in A$ taki, że $f(a) = b$. Mamy $g(f(a)) = g(b) = c$. Z równości $g \circ f = h \circ f$ wynika, że $h(f(a)) = c$, czyli $h(b) = c$, co pokazuje, że istotnie $g = h$ i kończy dowód tej implikacji.

Teraz pokażemy implikację w prawo. Przypuśćmy, że zachodzi $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow g = h$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że f nie jest na B. Skoro f nie jest na B, to istnieje pewne $b \in B$ takie, że dla każdego $a \in A$ mamy $f(a) \neq b$. Skonstruujemy teraz zbiór C i dwie funkcje $g, h : B \to C$ takie, że $g \circ f = h \circ f$, ale $g \neq h$. Niech $C = \{1, 2\}$, $g(x) = h(x) = 1$ dla wszystkich $x \neq b$ oraz $g(b) = 1$ i $h(b) = 2$. Zauważmy, że dla dowolnego $a \in A$ mamy $f(a) \neq B$. Zatem $g(f(a)) = h(f(a))$ dla dowolnego $a \in A$, co pokazuje, że $g \circ f = h \circ f$. Mamy jednak $g \neq h$, sprzeczność z założeniem, że rozważana implikacja zachodzi.

Zadanie 4.
Pokaż, że dla dowolnych niepustych rodzin A i B zachodzi $\bigcap A \times \bigcap B = \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \cap \beta \in B\}$.

Rozwiązanie
Uwaga: niepustość rodzin A i B jest tu potrzebna tylko do tego, żeby iloczyny uogólnione były dobrze zdefiniowane.

Pokażemy, że $(x, y) \in \bigcap A \times \bigcap B$ wtedy i tylko wtedy gdy $(x, y) \in \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \cap \beta \in B\}$.

Z definicji iloczynu kartezjańskiego $(x, y) \in \bigcap A \times \bigcap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \bigcap A$ oraz $y \in \bigcap B$. Z definicji przecięcia rodziny jest to równoważne koniunkcji $\forall_{\alpha\in A} x \in \alpha$ oraz $\forall_{\beta\in B} y \in \beta$. Znów z definicji produktu jest to równoważne $\forall_{\alpha\in A}\forall_{\beta\in B}(x, y) \in \alpha \times \beta$. Teraz ponownie z definicji przecięcia rodziny jest to równoważne $(x, y) \in \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \cap \beta \in B\}$, co kończy dowód.

Zadanie 5.
Niech $f : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$ będzie taka, że $f(A) = \mathrm{P}(A)$ dla $A \subseteq \mathbb{R}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$? Znaleźć $f^{-1}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q})))$ oraz $f(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))$.

Rozwiązanie
Funkcja f jest różnowartościowa. Niech $A, B \in \mathrm{P}(\mathbb{R})$ takie, że $A \neq B$. Wówczas bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \notin B$. Wtedy $\{x\} \in \mathrm{P}(A) = f(A)$, ale $\{x\} \notin \mathrm{P}(B) = f(B)$, czyli $f(A) \neq f(B)$.

Funkcja f nie jest na $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$. Rozważmy $\{\{0\}\} \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$. Mamy $\{\{0\}\} \neq \mathrm{P}(S)$ dla dowolnego $S \in \mathrm{P}(\mathbb{R})$, gdyż $\emptyset \in \mathrm{P}(S)$. Zatem $\{\{0\}\}$ nie należy do obrazu f, czyli f nie jest na $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$.

Mamy z definicji $f(\mathrm{P}(\mathbb{Q})) = \{f(A) \mid A \in \mathrm{P}(\mathbb{Q})\} = \{\mathrm{P}(A) \mid A \in \mathrm{P}(\mathbb{Q})\} = \{\mathrm{P}(A) \mid A \subseteq \mathbb{Q}\}$. Uwaga: $f(\mathrm{P}(\mathbb{Q})) \neq \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))$, zbiór $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))$ zawiera wszystkie zbiory podzbiorów $\mathbb{Q}$, a $f(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))$ jedynie te, które są postaci $P(A)$ dla pewnego $A \subseteq \mathbb{Q}$.

Mamy też $f^{-1}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))) = \{S \in \mathrm{P}(\mathbb{R}) \mid f(S) \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))\} = \{S \in \mathrm{P}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{P}(S) \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{Q}))\} = \{S \in \mathrm{P}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{P}(S) \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{Q})\} = \{S \in \mathrm{P}(R) \mid S \subseteq \mathbb{Q}\} = \mathrm{P}(\mathbb{Q})$, gdzie przedostatnia równość wynika z tego, że $A \subseteq B \iff \mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{P}(B)$.

Zadanie 6.
Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, że $(f, g) \in s$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists_n \forall_m (m > n \Rightarrow f(m) = g(m))$. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.

Rozwiązanie
Aby pokazać, że s jest relacją równoważności należy sprawdzić, że s jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Sprawdzimy po kolei te warunki.
Zwrotność Dla każdego $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ zachodzi $\forall_{m>0} f(m) = f(m)$, czyli s jest zwrotna.
Symetria Niech $(f, g) \in s$. Wówczas, z definicji, $\exists_n \forall_{m>n} f(m) = g(m)$. Jeśli $f(m) = g(m)$, to również $g(m) = f(m)$, czyli $\exists_n \forall_{m>n} g(m) = f(m)$. A więc $(g, f) \in s$, co kończy dowód symetrii.
Przechodniość Niech $(f, g) \in s$ oraz $(g, h) \in s$. Z definicji $\exists_{n_1} \forall_{m>n_1} f(m) = g(m)$ oraz $\exists_{n_2} \forall_{m>n_2} g(m) = h(m)$. A zatem $\forall_{m>\max(n_1,n_2)} f(m) = g(m) = h(m)$, czyli $(f, h) \in s$.

Niech pierwsza klasa abstrakcji to funkcje od pewnego miejsca równe 1, druga to funkcje od pewnego miejsca równe 2, a trzecia funkcje od pewnego miejsca równe 3.

Zadanie 7.
Niech f będzie bijekcją z A do A. Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór $B \subseteq A$ taki, że $B \subseteq f(A - B)$.

Rozwiązanie
Niech $X = \{B \subseteq A \mid B \subseteq f(A \setminus B)\}$. Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w X. Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest ograniczeniem górnym $\mathcal{L}$ i należy do X. Zbiór $\bigcup \mathcal{L}$ jest oczywiście ograniczeniem górnym $\mathcal{L}$, bo dla każdego $S \in \mathcal{L}$ mamy $S \subseteq \bigcup \mathcal{L}$. Pokażemy teraz, że istotnie $\bigcup \mathcal{L} \in X$.

Należy więc wykazać, że $\bigcup \mathcal{L} \subseteq f(A \setminus \bigcup \mathcal{L})$. Niech $x \in \bigcup \mathcal{L}$. Ponieważ $x \in \bigcup \mathcal{L}$, to istnieje $C \in \mathcal{L}$ taki, że $x \in C$. Mamy $C \subseteq f(A \setminus C)$, czyli w szczególności

$x \in f(A \setminus C)$. Mamy też $C, D \in \mathcal{L}$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem to $C \subseteq D$ lub $D \subseteq C$. Jeśli $C \subseteq D$, to $x \in C \subseteq D$, więc także $x \in f(A \setminus D)$. Jeśli zaś $D \subseteq C$, to $x \in C \subseteq f(A \setminus C) \subseteq f(A \setminus D)$, a więc też $x \in f(A \setminus D)$. A zatem dla każdego $D \in \mathcal{L}$ mamy $x \in f(A \setminus D)$.

Przypomnijmy, że f jest bijekcją, czyli, że istnieje dokładnie jeden $y \in A$ taki, że $f(y) = x$. Ponieważ dla każdego $D \in \mathcal{L}$ mamy $x \in f(A \setminus D)$, to dla każdego $D \in \mathcal{L}$ mamy $y \notin D$. A zatem $y \notin \bigcup \mathcal{L}$. To oznacza, że $y \in A \setminus \bigcup \mathcal{L}$, a więc $x \in f(A \setminus \bigcup \mathcal{L})$. Czyli istotnie $\bigcup \mathcal{L} \subseteq f(A \setminus \bigcup \mathcal{L})$, co znaczy, że $\bigcup \mathcal{L} \in X$.

A zatem dla każdego łańcucha w X istnieje jego ograniczenie górne w X. Z lematu Kuratowskiego-Zorna dostajemy, że istnieje element maksymalny w X, co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga! Bez założenia, że f jest bijekcją ten sam dowód nie działa, to znaczy niekoniecznie $\bigcup \mathcal{L} \in X$. Być może nawet całe zadanie nie jest prawdziwe. Rozważmy bowiem funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$, $f(5) = 2$, $f(6) = 1$, $f(7) = 4$, $f(8) = 3$, $f(9) = 2$, $f(10) = 1$ itd., czyli po prostu odlicza od coraz większych liczb w dół. Można to napisać bez większych problemów wzorem. Niech $A_n = \{1, \ldots, n\}$ i niech $\mathcal{L} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jasne jest, że $\mathcal{L}$ jest faktycznie łańcuchem. Mamy też $\bigcup \mathcal{L} = \mathbb{N}$. Co więcej mamy, że $A_n \subseteq f(\mathbb{N} \setminus A_n)$, bo każda z liczb $1, \ldots, n$ jest przyjmowana przez f dla argumentów większych niż n. Czyli $A_n \in X$. Niemniej jednak

$$\bigcup \mathcal{L} = \mathbb{N} \nsubseteq f(\mathbb{N} \setminus \bigcup \mathcal{L}) = f(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) = \emptyset,$$

czyli $\bigcup \mathcal{L} \notin X$.

Zadanie 8.
Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazwiemy *zygzakiem*, gdy spełnia warunek

$$\forall_{x>0}((f(x) > f(x-1) \Rightarrow f(x) > f(x+1)) \wedge (f(x) < f(x-1) \Rightarrow f(x) < f(x+1))).$$

Jakiej mocy jest zbiór wszystkich zygzaków?

Rozwiązanie
Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich zygzaków. Oczywiście $Z \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a więc $|Z| \leqslant |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ Pokażemy teraz, że $|Z| \geqslant \mathfrak{c}$. Wskażemy funkcję $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Z$, która będzie różnowartościowa, co pokaże, że $|Z| \geqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Funkcję F definujemy jako

$$F(f)(n) = \begin{cases} 0 \text{ jeśli } 2 \nmid n \\ f(\frac{n}{2}) \text{ jeśli } 2 \mid n \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że $F(f)$ jest istotnie zygzakiem dla dowolnej $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ oraz, że F jest różnowartościowa.

Skoro $\mathfrak{c} \leqslant |Z| \leqslant \mathfrak{c}$, to z twierdzenia Cantora-Bernsteina $|Z| = \mathfrak{c}$.