Języki, automaty i obliczenia
egzamin testowy – przykładowe rozwiązania
28 czerwca 2017

1. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Np. niech L_1 zawiera słowo puste oraz wszystkie słowa długości pierwszej, a L_2 niech zawiera słowo puste oraz wszystkie słowa długości niepierwszej.

2. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Język regularny jest rozpoznawany przez maszynę deterministyczną, która raz czyta słowo wejściowe, nigdy nie zmienia kierunku ruchu głowicy, i nigdy nie pisze na taśmie; w szczególności czas działania takiej maszyny jest wielomianowy (a nawet liniowy) względem długości słowa wejściowego.

3. Odpowiedź: **nie**.

Uzasadnienie: Nierozstrzygalny jest już specjalny przypadek, gdy automat A akceptuje wszystkie słowa, czyli problem uniwersalności języka bezkontekstowego.

4. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Załóżmy najpierw, że symbol # nie występuje w słowach z języka L. Wtedy język $K = \{w\#\mathrm{rev}(w)\#w \mid w \in L\}$ jest przecięciem następujących trzech języków (przez *segment* słowa rozumiemy poniżej maksymalny infiks nie zawierający #):

- K_1: liczba symboli # w słowie jest równa 2, czyli słowo zawiera dokładnie 3 segmenty, oraz pierwszy segment należy do L;
- K_2: dwa pierwsze segmenty słowa są wzajemnymi rewersami;
- K_3: dwa ostatnie segmenty słowa są wzajemnymi rewersami.

Czyli $K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Dopełnienie języka K_1 jest regularne (więc bezkontekstowe), a dopełnienia pozostałych dwóch są bezkontekstowe. A skoro suma języków bezkontekstowych jest bezkontekstowa, dopełnienie języka K, będąc sumą dopełnień powyższych trzech języków, jest bezkontekstowe.

Teraz dopuśćmy występowanie symbolu $\#$ w słowach z języka L. Uzasadnienie jest podobne, choć nieco bardziej skomplikowane. Język K jest przecięciem następujących pięciu języków:

- K_0: słowo w ma długość $3n+2$, dla pewnego n, oraz $w[1\dots n] \in L$;
- K_1: słowo w ma długość $3n+2$, dla pewnego n, oraz $w[n{+}1] = \#$;
- K_2: słowo w ma długość $3n+2$, dla pewnego n, oraz $w[2n{+}2] = \#$;
- K_3: słowo w ma długość $3n+2$, dla pewnego n, oraz słowa $w[1\dots n]$ i $w[n{+}2\dots 2n{+}1]$ są wzajemnymi rewersami;
- K_4: słowo w ma długość $3n{+}2$, dla pewnego n, oraz słowa $w[n{+}2\dots 2n{+}1]$ i $w[2n{+}3\dots 3n{+}2]$ są wzajemnymi rewersami.

Czyli $K = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4$. Dopełnienie języka K_0 jest sumą dwóch języków: języka regularnego R słów, których długość daje resztę różną od 2 przy dzieleniu przez 3, oraz języka bezkontekstowego

$$\{w\Sigma^{2|w|+2} \mid w \notin L\}.$$

Zatem dopełnienie języka K_0 jest bezkontekstowe. Dopełnienie języka K_1 jest sumą R oraz języka bezkontekstowego

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n(\Sigma \setminus \{\#\})\Sigma^{2n+2}.$$

Zatem dopełnienie języka K_1 jest bezkontekstowe. Podobnie pokazujemy, że dopełnienie języka K_2 jest bezkontekstowe. Dopełnienie języka K_3 jest sumą R oraz języka

$$\bigcup_{x,y\in\Sigma\setminus\{\#\},x\neq y} \;\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} \Sigma^i x \Sigma^{2j+1} y \Sigma^{2i+j+1}$$

(pomyślmy, że $n = i + j$), który jest bezkontekstowy. Zatem dopełnienie języka K_3 jest bezkontekstowe. Podobnie pokazujemy, że dopełnienie języka K_4 jest bezkontekstowe. Więc dopełnienie języka K, będąc sumą dopełnień powyższych pięciu języków, jest bezkontekstowe.

5. Odpowiedź: **nie**.

Uzasadnienie: Nie, ponieważ inkluzja P $\subseteq$ CFL nie zachodzi. Kontrprzykładem jest np. język słów nad $\{a, b, c\}$ zawierających tyle samo wystąpień każdej z liter. Przynależność słowa do tego języka można sprawdzić za pomocą maszyny deterministycznej działającej w czasie wielomianowym, a język nie jest bezkontekstowy.

6. Odpowiedź: **nie**.

Uzasadnienie: Jeśli stos nigdy (w żadnym biegu) nie jest głębszy niż 2017, to jego zawartość można reprezentować w stanach automatu i tym samym pozbyć się stosu.

7. Odpowiedź: **nie**.

Uzasadnienie: Kontrprzykładem jest np. język $L_k = \{a, b\}^* a \{a, b\}^k$, dla wystarczająco dużego k. Wyrażenie regularne dla L_k ma rozmiar nie większy niż $100k$. Dopełnienie L_k to słowa krótsze niż $k + 1$, plus język $L'_k = \{a, b\}^* b \{a, b\}^k$. Słowa krótsze niż $k + 1$ można opisać wyrażeniem regularnym rozmiaru co najwyżej $100k^2$, a język L'_k potrzebuje wyrażenia rozmiaru takiego samego co język L_k. Natomiast każdy automat deterministyczny rozpoznający L_k ma przynajmniej 2^k stanów.

8. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Wystarczy sprawdzić wszystkie biegi M na słowie w długości co najwyżej $2^{|w|}$ - jest ich skończenie wiele.

9. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Wyrażenie regularne można przekształcić, w czasie wielomianowym, na równoważny automat niedeterministyczny. Problem przynależności (czy dany automat niedeterministyczny A akceptuje dane słowo w) jest rozstrzygalny w deterministycznym czasie wielomianowym: obliczamy zbiory stanów automatu A po przeczytaniu kolejnych, coraz dłuższych, prefiksów słowa w.

10. Odpowiedź: **tak**.

Uzasadnienie: Ponieważ obydwa stosy mają zawsze taką samą głębokość, taki automat jest *de facto* automatem z jednym stosem, gdy za alfabet stosowy uznamy iloczyn kartezjański obydwu alfabetów stosowych.