Zadanie 1

Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Pokażemy, że język palindromów $L \subset \Sigma^*$ nie jest językiem rozpoznawalnym przez ten automat mimo, iż jest bezkontekstowy. Załóżmy, że taki automat A rozpoznaje język L. Niech jego zbiór stanów to będzie Q i niech $|Q| = m$.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i weźmy zbiór wszystkich słów o długości n nad alfabetem Σ. Nazwijmy go B.

Dla każdego słowa $w \in B$ w oczywisty sposób $ww^R \in L$, czyli istnieje bieg akceptujący automatu A po słowie ww^R. Weźmy jeden taki bieg i spójrzmy na to, w jakim stanie się znajduje po wczytaniu pierwszej połowy słowa (czyli w) i nazwijmy go (k_w, q_w) gdzie $k_w \in \mathbb{N}$ jest wysokością stosu oraz $q_w \in Q$. Zauważmy również, że jeżeli $w, v \in B, w \neq v$ to $wv^R \notin L$.

Zdefiujmy funkcję $g : B \to \mathbb{N} \times Q$, która jest określona $g(w) = (k_w, q_w)$.

Zauważmy, że przy czytaniu jednej litery automat przechodzi co najwyżej jedną krawędzią z literką i dowolnie wieloma krawędziami z ϵ-przejściami. Każde przejście po krawędzi zwiększa wysokość stosu co najwyżej o 1.

Weźmy graf G taki, że wierzchołkami będą elementy zbioru Q, a krawędź skierowana między q_a i q_b istnieje wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ϵ-przejście między q_a i q_b.

Zdefiniujmy $B_0 \subset B$ tak, że $w \in B_0$ jeżeli bieg automatu defiujący $g(w)$ nie odwiedza żadnego stanu, który leży na cyklu w grafie G. Skoro nie odwiedziliśmy żadnego wierzchołka leżącego na cyklu, to przy wczytaniu kazdej litery przechodziliśmy co najwyżej m krawędziami, czyli $k_w \leq mn$.

Weźmy dwa różne słowa $v, w \in B_0$. Jeżeli $g(w) = g(v)$, to skoro słowo $ww^R \in L(A)$ to również $vw^R \in L(A)$, ponieważ skoro ze stanu $g(w)$ istnieje bieg akceptujący, który przechodzi po w^R to oba te słowa zostaną zaakceptowane. Zatem sprzeczność.

Każde takie $g(w)$ dla elementów B_0 musi być różne, czyli $|B_0| \leq m^2 n$.

Zdefiujmy również zbiory $B_{q_1}, B_{q_2}, \ldots, B_{q_m}$. Dla każdego $w \in B - B_0$ istnieje taki stan q, że bieg defiujący $g(w)$ odwiedza q i q leży na jakimś cyklu w G. Zatem dla każdego $w \in B - B_0$ ustalmy jedno konkretne takie q i niech $w \in B_q$.

Zatem $B_0 \cup B_{q_1} \cup B_{q_2} \cup \ldots \cup B_{q_m} = B$.

Jeżeli q_i nie leży na cyklu to oczywiście $|B_{q_i}| = 0$.

Dla każdego $q \in Q$ takiego, że q leży na cyklu w G niech l będzie najkrótszą długością cyklu, na którym leży q. Bardzo prosto można pokazać, że $l \leq m$, ponieważ jeżeli wierzchołek leży w grafie na cyklu, to leży również na cyklu prostym.

Jeżeli $w, v \in A_q, g(w) = (k_w, q_w), g(v) = (k_v, q_v)$ oraz $q_w = q_v$ to (bez straty ogólności załóżmy, że $k_w \leq k_v$) jeżeli $l | k_v - k_w$ to istnieje również taki bieg automatu A po słowie w, że dochodzi do stanu $g(v)$, ponieważ skoro kiedyś odwiedza stan q to może tam dodatkowo $\frac{k_v - k_w}{l}$ razy przejść po tym cyklu o długości l, a wtedy dojdzie do stanu $g(v)$. Zatem analogicznie jak wyżej automat A zaakceptuje również słowo wv^R, które zdecydowanie nie należy do języka L, zatem sprzeczność.

Czyli jeżeli dwa słowa w B_q mają taki sam stan w funkcji g to muszą mieć różną resztę z dzielenia przez l. Zatem $|B_q| \leq lm \leq m^2$.

$$|B| \leq |B_0| + |B_{q_1}| + |B_{q_2}| + \ldots + B_{q_m} \leq m^2 n + m^3$$

. Z drugiej strony $|B| = 2^n$. Skoro m to jakaś stała dla automatu A to z łatwością można dobrać takie n, by $2^n > m^2 n + m^3$. Zatem sprzeczność. Taki automat A nie może istnieć.