Kartkówka 4

1. Podaj definicję wektora własnego macierzy M.

2. Oblicz rozkład LU macierzy

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Oblicz postać Jordana macierzy

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Szkice rozwiązań

1. Wektor v jest wektorem własnym macierzy M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pewna liczba rzeczywista $\lambda \neq 0$ taka, że $Mv = \lambda v$.

2. Liczymy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Wielomian charakterystyczny wynosi $(x-3)^3$, więc jedyna wartość własna to $\lambda_1 = 3$. Obliczmy teraz ile jest klatek Jordana dla wartości 3.

$$M - 3 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem $im(M - 3 \cdot I) = 2$, zatem $ker(M - 3 \cdot I) = 1$. To znaczy, że jest dokładnie jedna klatka Jordana wielkości 1, czyli postać Jordana dla M to macierz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$