Kartkówka 3

1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podaj definicję przestrzeni V^* funkcjonałów liniowych na V, tj. powiedz jaka jest dziedzina i jakie są operacje dodawania i mnożenia na dziedzinie.

2. Rozważmy przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowane następująco:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 2x_2 - x_3).$$

Napisz macierz tego przekształcenia w bazach $((2, 1, 0), (0, 1, 2), (0, 2, 0))$ i $((0, 1), (1, 1))$.

3. Rozważmy funkcjonały $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$, $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$ oraz $\phi_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 2x_3$, które są bazą przestrzeni funkcjonałów liniowych na $\mathbb{R}^3$. Wiedząc, że baza sprzężona do tej bazy to: $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (-2, 2, -1)$, $v_3 = (1, -1, 1)$ wykonaj poniższe polecenie. Niech $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2 + 3x_3$ oraz $v = (2, 5, -4)$. Przedstaw ϕ w bazie (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) oraz v w bazie (v_1, v_2, v_3).

Szkice rozwiązań

1. Przestrzeń V^* to zbiór $f : V \to K$ takich, że dla dowolnych $v_1, v_2 \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 in K$ zachodzi $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$ z działaniami $+$ oraz $\cdot$. Dodawanie w V^* jest zdefiniowane jako $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$ a mnożenie jako $(\alpha \cdot f)(v) = \alpha \cdot f(v)$.

2. Mamy $f((2, 1, 0)) = (1, 12)$, $f((0, 1, 2)) = (5, 0)$, $f((0, 2, 0)) = (-6, 4)$. Przedstawmy więc powyższe wektory w bazie $((0, 1), (1, 1))$. $(1, 12) = 11 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1)$, $(5, 0) = -5 \cdot (0, 1) + 5 \cdot (1, 1)$, $(-6, 4) = 10 \cdot (0, 1) + (-6) \cdot (1, 1)$. Zatem szukana macierz wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & 10 \\ 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. Zauważmy, że zawsze:

$$v = \phi_1(v) \cdot v_1 + \phi_2(v) \cdot v_2 + \phi_3(v) \cdot v_3,$$

wynika to z faktu, że rozważane bazy są sprzężone. Pokażmy, że istotnie jest to prawda. Niech

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3.$$

Wówczas

$\phi_1(v) = \phi_1(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3) = a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_1(v_2)+a_3\phi_1(v_3) = a_1\cdot1+a_2\cdot0+a_3\cdot0 = a_1.$

Analogicznie $\phi_2(v) = a_2$ i $\phi_3(v) = a_3$, czyli istotnie podany wyżej wzór jest prawdziwy.

Prawdziwy jest również wzór:

$$\phi = \phi(v_1)\cdot\phi_1 + \phi(v_2)\cdot\phi_2 + \phi(v_3)\cdot\phi_3.$$

Aby to wykazać załóżmy

$$\phi = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3.$$

Mamy

$\phi(v_1) = (b_1\phi_1+b_2\phi_2+b_3\phi_3)(v_1) = b_1\phi_1(v_1)+b_2\phi_2(v_1)+b_3\phi_3(v_1) = b_1\cdot1+b_2\cdot0+b_3\cdot0 = b_1.$

Analogicznie $\phi(v_2) = b_2$ oraz $\phi(v_3) = b_3$, co dowodzi wyżej przedstawionego wzoru.

A zatem $v = 7v_1 + v_2 - 10v_3$ oraz $\phi = 8\phi_1 - 11\phi_2 + 7\phi_3$.