Kartkówka 2

1. Niech $M \in K^{m,n}$. Podaj definicję obrazu macierzy M.

2. Oblicz macierz odwrotną do:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Niech $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie zdefiniowana jako:

$$V = \{\overrightarrow{x} \in R^4 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\}.$$

Znajdź bazę przestrzeni V oraz podaj jej wymiar.

Szkice rozwiązań

1. Obraz macierzy M to zbiór

$$\mathcal{R} = \{M \cdot \overrightarrow{x} : \overrightarrow{x} \in K^n\}.$$

Wykonując kolejne operacje elementarne obliczamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & -1/5 \\ -2/5 & 1 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź to:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & -1/5 \\ -2/5 & 1 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

3. Możemy wpisać współczynniki naszych równań do macierzy, aby używając eliminacji Gaussa doprowadzić je do prostszej postaci.

Wpisujemy zatem i otrzymujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykonujemy dwa kroki eliminacji i otrzymujemy kolejno:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

W ten sposób uzyskaliśmy równoważny układ równań:

$$x_1 - 2x_3 - 3x_4 = x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,$$

czyli uzależniliśmy x_1 oraz x_2 od x_3 i x_4. Mamy więc $x_1 = 2x_3 + 3x_4$ oraz $x_2 = -2x_3 - x_4$.

Wypisujemy więc pewną bazę rozpinającą przestrzeń $\mathbb{R}^2$ i wpisujemy ją na współrzędnych x_3 oraz x_4. Chodzi o to, żeby uzyskać wszystkie możliwości na tych współrzędnych. Niech ta baza to $(0,1)$ oraz $(1,0)$, czyli $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ oraz $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Obliczamy ile wynosi wtedy x_1 oraz x_2. W tych przypadkach odpowiednio mamy $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ oraz $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Zatem wektory bazy to:

$$(2, -2, 1, 0)$$

i

$$(3, -1, 0, 1).$$

Nietrudno sprawdzić, że istotnie jest to baza, argumentujemy tak jak na ćwiczeniach. Wymiar V to liczność bazy, czyli 2.